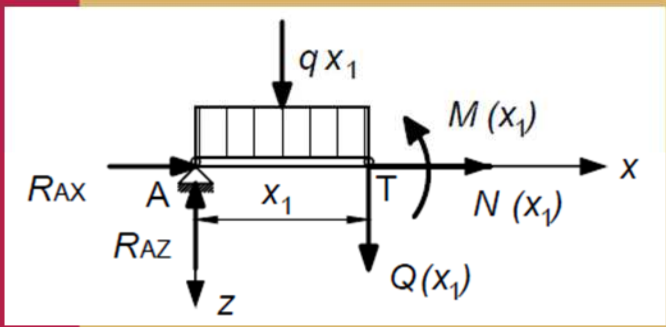
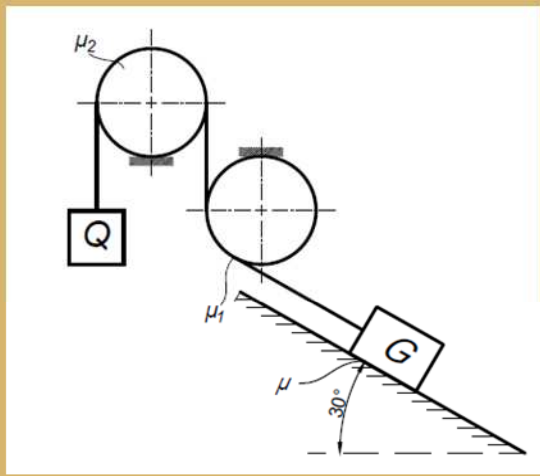
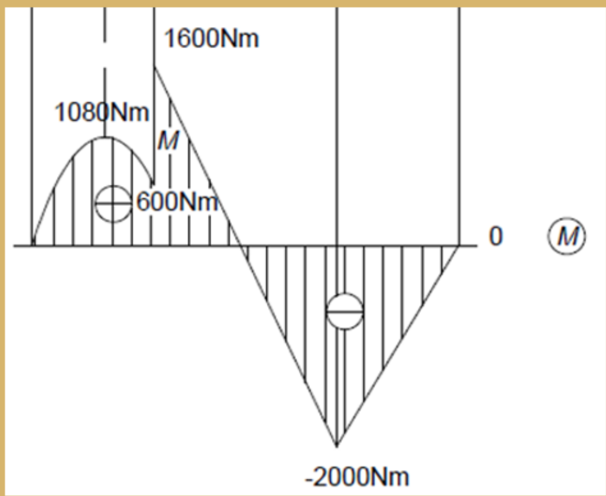
VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Karlovac University of Applied Sciences







$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x^{F_i} = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y^{F_i} = 0$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z^{F_i} = 0$$

Nenad Lorković

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ STATIKE

ISBN (*online*) 978-953-8213-14-4
Izdavač: Veleučilište u Karlovcu
Za izdavača: Ivan Štedul, v. pred.
Recenzenti: dr. sc. Radoslav Korbar, prof. v. š., doc. dr. sc. Tihomir Mihalić, prof. v. š.,
dr. sc. Josip Hoster, v. pred.

Grafički urednik: Nenad Lorković
Lektorica: Maja Kličarić

Objavljivanje ovog udžbenika odobrilo je Povjerenstvo za izdavačku djelatnost Veleučilišta u Karlovcu Odlukom o izdavanju publikacije br. 7.5-13-2021-4.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

Nenad Lorković

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ STATIKE

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Karlovac University of Applied Sciences

Karlovac, 2022.

SADRŽAJ:

PREDGOVOR

Ova je zbirka prvenstveno namijenjena studentima koji pohađaju nastavu iz kolegija Mehanika 1 na prvoj godini stručnih Studija strojarstva i mehatronike Veleučilišta u Karlovcu. Prema nastavnom planu i programu, u okviru kolegija Mehanika 1 se izučavaju teorijske osnove i temeljna načela statike. Praktična primjena teorijskih znanja studentima se prezentira kroz razne primjere na predavanjima i riješene zadatke na vježbama.

U proteklih petnaestak godina, u okviru redovne nastave na vježbama iz statike, riješeno je mnogo različitih zadataka. Sasvim je razumljivo da svi ti zadaci ne mogu biti objavljeni na jednom mjestu pa ova zbirka obuhvaća odabrane riješene zadatke iz tog perioda za koje se smatra da bi mogli pomoći boljem razumijevanju i primjeni osnova statike.

Naime, primijećeno je da bez obzira na redovno pohađanje nastave, studenti nedovoljno sami rješavaju zadatke s vježbi i primjere s predavanja. Uz izučavanje teorijskih osnova, samostalno rješavanje zadataka bi trebao biti osnovni preduvjet za pripremanje ispita iz statike, tj. *Mehanike 1*, tim više što se u ispitnim zadaćama pojavljuju vrlo slični ili gotovo isti zadaci prezentirani na vježbama.

Nadam se da će ova zbirka pridonijeti boljoj primjeni teorijskih znanja i boljoj metodičnosti pri rješavanju zadataka.

Ovom bi se prigodom želio zahvaliti svima onima koji su na bilo koji način sudjelovali i pomogli kod izrade ove zbirke. Posebna zahvala recenzentima dr. sc. Josipu Hosteru, dr. sc. Radoslavu Korbaru i doc. dr. sc. Tihomiru Mihaliću na stručnim savjetima koji su pomogli da prezentirani zadaci budu što razumljiviji studentima.

Karlovac, 2022. Nenad Lorković

1. POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATAKA IZ STATIKE

Zadaci iz statike se mogu podijeliti u dvije osnovne grupe:

a) *Za zadani ravnotežni položaj točke, tijela ili sistema tijela je potrebno izračunati sile koje djeluju da bi se održao ravnotežni položaj.*
U tom se slučaju rješavanje zadatka svodi na izračunavanje reakcija veza ili sila koje djeluju u različitim dijelovima zadanog sistema.

b) *Za zadane sile koje djeluju na točku, tijelo ili sistem sila potrebno je odrediti odgovarajući položaj ravnoteže.*
U tom je slučaju potrebno izračunati nepoznanice za definiranje ravnotežnog položaja.
Te nepoznanice mogu biti sile, ali i neke geometrijske veličine (duljine, kutovi itd.).

Zajedničko je svim zadacima da moraju biti zadovoljeni uvjeti ravnoteže točke ili tijela, te sustava sila koji djeluje na točku ili tijelo. Što god računali, postavljamo uvjete ravnoteže i računamo nepoznanice. Da bi zadatak iz statike bio statički određen, broj linearno nezavisnih jednadžbi ravnoteže mora odgovarati broju nepoznanica.

Opći uvjeti ravnoteže krutog tijela na koji djeluje sustav sila u prostoru se mogu prikazati s dvije jednadžbe ravnoteže u vektorskom obliku.

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k} = \vec{0}, \qquad (1.1)$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k} = \vec{0}. \qquad (1.2)$$

Dakle, kruto tijelo će biti u ravnoteži kada su rezultantna sila i rezultantni moment jednaki nuli. Drugim riječima, ravnoteža krutog tijela će biti zadovoljena ako su sve skalarne komponente rezultantne sile i rezultantnog momenta prema koordinatnim osima jednake nuli. Na osnovu toga, vektorske jednadžbe (1.1) i (1.2) zamjenjujemo sa šest analitičkih uvjeta ravnoteže koje ćemo koristiti za rješavanje zadataka iz statike.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad (1.3) \qquad\qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x^{F_i} = 0 \qquad (1.6)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \qquad (1.4) \qquad\qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y^{F_i} = 0 \qquad (1.7)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 \qquad (1.5) \qquad\qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z^{F_i} = 0 \qquad (1.8)$$

Odabir potrebnog broja jednadžbi ravnoteže za rješavanje zadataka ovisi o vrsti sustava sila koji djeluje na kruto tijelo. O tome će više biti riječi u sljedećim poglavljima.

Također, zbog pojednostavljenja, oznaku *i* ćemo izostaviti prilikom postavljanja jednadžbi ravnoteže, tj. kod sumiranja komponenti sila i momenata u odnosu na pojedinu koordinatnu os.

Postupak rješavanja zadataka iz statike može se svesti na sljedeće korake:

a) *Skicirati mehanički model s ucrtanim aktivnim silama i simbolima veza s drugim tijelima ili okolinom. Obavezno označiti koordinatni sustav koji se koristi.*
b) *Osloboditi tijelo veza i pored aktivnih sila ucrtati odgovarajuće reakcije veza.*
c) *Prepoznati o kojem se skupu sila radi i napisati odgovarajuće jednadžbe ravnoteže.*
d) *Napisati dopunske jednadžbe geometrijskih ili trigonometrijskih odnosa ako je to potrebno.*
e) *Riješiti uvjete ravnoteže i iz njih izračunati nepoznanice.*
f) *Provjeriti ispravnost i logičnost dobivenih rješenja.*

Preporučljivo je da se uvjeti ravnoteže i konačni izrazi za izračunavanje nepoznanica definiraju u općim brojevima koji predstavljaju poznate zadane veličine. Tek nakon toga treba pristupiti uvrštavanju zadanih numeričkih vrijednosti.

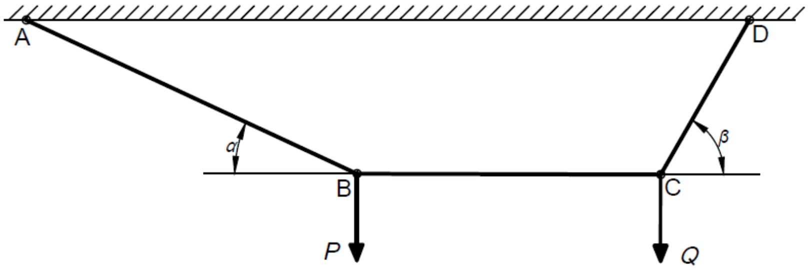
2. KONKURENTNI SUSTAV SILA U RAVNINI

Zadatak 2.1.

Dva utega, P i Q, opterećuju štapnu konstrukciju u točkama B i C kako je prikazano na slici 2.1a. Za zadani ravnotežni položaj potrebno je izračunati:

a) Sile u štapovima AB, BC i CD.
b) Težinu utega Q.

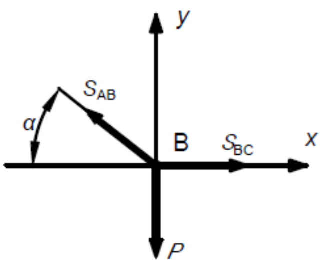
Zadano: α = 25º, β = 60º, P =15 N.



Slika 2.1a: *Štapna konstrukcija*

Ucrtavanjem reaktivnih sila u štapovima dobivamo dva konkurentna sustava sila sa sjecištima pravaca djelovanja u točkama B i C. Dakle, potrebno je odvojeno promatrati ravnotežu obje točke.

Krećemo od točke B (slika 2.1b) u kojoj se sijeku pravci djelovanja jedne poznate i dvije nepoznate sile.



Slika 2.1b: *Sustav sila u točki B*

Iz ravnoteže točke B dobivamo:

$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_{AB} \cos\alpha + S_{BC} = 0,$ (2.1.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_{AB} \sin\alpha - P = 0.$ (2.1.2)

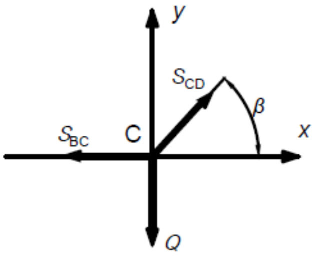
Iz jednadžbe (2.1.2) dobivamo rezultat za silu u štapu AB:

$$S_{AB} = \frac{P}{\sin\alpha} = 35{,}5 \text{ N},$$

a iz jednadžbe (2.1.1), rezultat za silu u štapu BC:

$S_{BC} = S_{AB} \cos\alpha = 32{,}2$ N.

Nastavljamo s ravnotežom točke C, prikazano na slici 2.1c.



Slika 2.1c: *Sustav sila u točki C*

$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{CD} \cos\beta - S_{BC} = 0,$ (2.1.3)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_{CD} \sin\beta - Q = 0.$ (2.1.4)

Iz te dvije jednadžbe dobivamo tražene rezultate.

$$S_{CD} = \frac{S_{BC}}{\cos\beta} = 64{,}4 \text{ N},$$

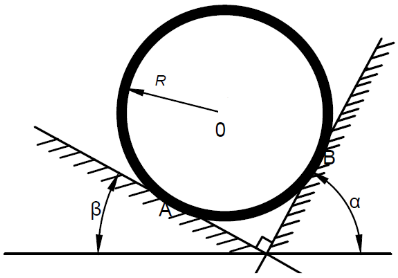
$Q = S_{CD} \sin\beta = 55{,}8$ N.

Zadatak 2.2.

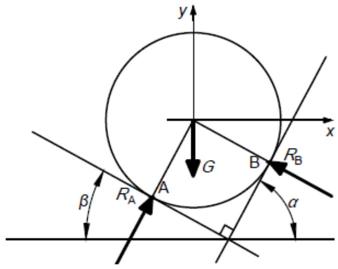
Homogeni valjak težine G i polumjera R se u točkama A i B oslanja na dvije međusobno okomite idealno glatke plohe (slika 2.2a).

Potrebno je izračunati reakcije u točkama A i B.

Zadano: $G = 4000$ N , $\alpha = 60^o$, $R = 1$ m.

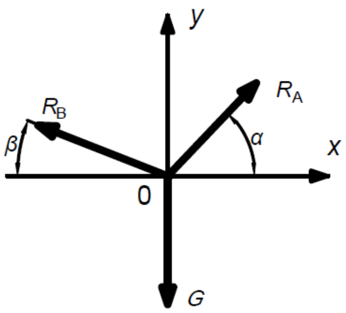


Slika 2.2a: *Homogeni valjak*



Slika 2.2b: *Valjak oslobođen od veza*

Ucrtane reakcije u točkama A i B, te težina G su prikazani na slikama 2.2b i 2.2c. Pravci djelovanja sve tri sile se sijeku u točki O, tj. središtu valjka. To znači da promatramo ravnotežu konkurentnog sustava sila te postavljamo jednadžbe ravnoteže kako slijedi:



Slika 2.2c: *Sustav sila u točki O*

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -R_B \cos\beta + R_A \cos\alpha = 0, \qquad (2.2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -G + R_A \sin\alpha + R_B \sin\beta = 0. \qquad (2.2.2)$$

Nepoznati kut β je: $\beta = 180° - 90° - \alpha = 30°$.

Izraz dobiven iz jednadžbe (2.2.1)

$$R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{B}}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,, \qquad (2.2.3)$$

uvrštavamo u jednadžbu (2.2.2)

$$-G + R_{\mathrm{B}}\,\cos\beta\,\tan\alpha + R_{\mathrm{B}}\,\sin\beta = 0,$$

a nakon sređivanja dobivamo izraz za izračunavanje reakcije u točki B te njen rezultat.

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{G}{\cos\beta\,\tan\alpha + \sin\beta} = 2000\ \mathrm{N}.$$

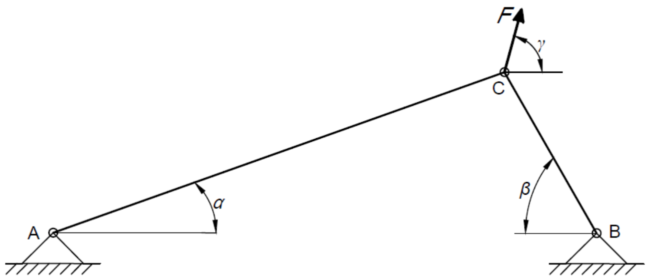
Nakon toga, iz jednadžbe (2.2.3) slijedi rezultat za reakciju u točki A.

$$R_{\mathrm{A}} = 3464\ \mathrm{N}.$$

Zadatak 2.3.

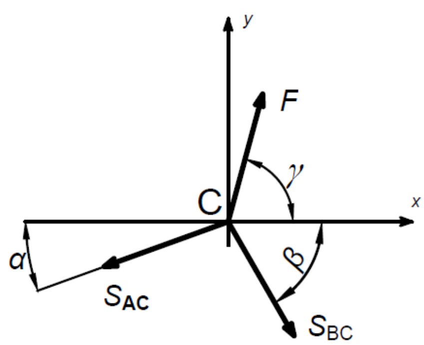
Dva užeta su spojena u točki C kako je prikazano na slici 2.3a. Ako je zadana maksimalno dozvoljena sila S u svakom užetu, potrebno je odrediti vrijednost sile F i kuta γ pod kojim ta sila treba djelovati.

Zadano: S = 2500 N , α = 20º, β = 50º.



Slika 2.3a: *Položaj i opterećenje užadi*

Nakon ucrtavanja reaktivnih sila u užadima koje su prikazane na slici 2.3b, postavljamo uvjete ravnoteže za točku C.



Slika 2.3b: *Sustav sila u točki C*

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F\ \cos\gamma + S_{BC}\ \cos\beta - S_{AC}\ \cos\alpha = 0, \qquad (2.3.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F\ \sin\gamma - S_{BC}\ \sin\beta - S_{AC}\ \sin\alpha = 0. \qquad (2.3.2)$$

Uz zadani uvjet da je $S_{BC} = S_{AC} = S$, iz jednadžbe (2.3.1) dobivamo:

$$F = S\ \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\gamma}. \qquad (2.3.3)$$

Uvrstimo li taj izraz u jednadžbu (2.3.2) dobivamo:

$$S\ \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\gamma}\ \sin\gamma - S\ (\sin\beta + \sin\alpha) = 0.$$

Nakon sređivanja dolazimo do izraza za traženu vrijednost kuta γ:

$$\tan\gamma = \frac{\sin\beta + \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta} = 3{,}732 \rightarrow \gamma = \mathrm{arctg}\ 3{,}732 = 75^{\circ}\ .$$

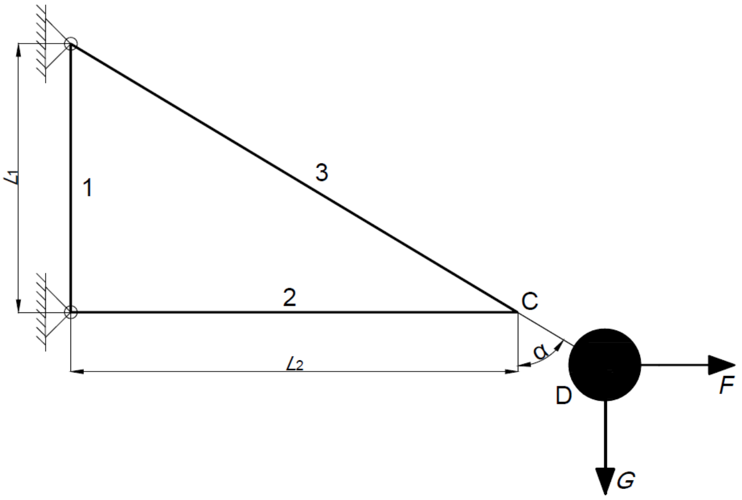
Uz izračunati kut γ, maksimalna vrijednost sile F iz izraza (2.3.3) je: F = 2867,9 N.

Zadatak 2.4.

Trokutasta konzola je sastavljena od tri štapa. Na konzolu je u točki C obješen uteg težine G, kojeg u vodoravnom smjeru vuče sila F.

Potrebno je izračunati silu u užetu i sile u štapovima 2 i 3 da sistem bude u stanju ravnoteže kako je prikazano na slici 2.4a.

Zadano: L_1 = 0,5 m, L_2 = 2,4 m, G = 1500 N, F = 500 N.

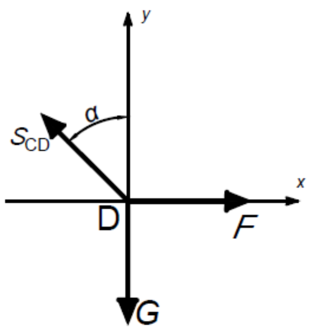


Slika 2.4a: *Zadani ravnotežni položaj trokutaste konzole i utega*

Osim reaktivnih sila u štapovima i užetu, kao nepoznanica se pojavljuje i kut α koji definira zadani ravnotežni položaj.

Dakle, promatrat ćemo dva konkurentna sustava sila sa sjecištima pravaca djelovanja u točkama D i C, kao što je prikazano na slikama 2.4b i 2.4c.

Počinjemo s točkom D (slika 2.4), izračunavanjem sile u užetu, te kuta α.



Slika 2.4b: *Sustav sila u točki D*

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F - S_{CD}\sin\alpha = 0, \qquad (2.4.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow S_{CD}\cos\alpha - G = 0. \qquad (2.4.2)$$

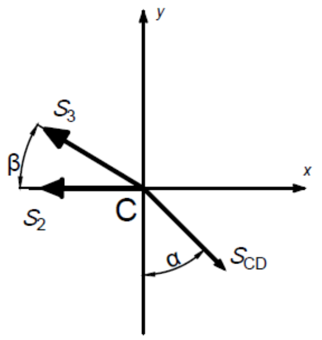
Iz jednadžbe (2.4.1) je:

$$S_{CD} = \frac{F}{\sin\alpha}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (2.4.2) , te nakon sređivanja, dobivamo izraz za izračunavanje kuta α.

$$\tan\alpha = \frac{F}{G} = 0{,}333 \rightarrow \alpha = 18{,}4°.$$

Time je sila u užetu: S_{CD} = 1584 N.



Slika 2.4c: *Sustav sila u točki C*

Prema slici 2.3c, uvjeti ravnoteže točke C su:

$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{CD}\ \sin\alpha - S_2 - S_3\ \cos\beta = 0,$ (2.4.3)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_3\ \sin\beta - S_{CD}\ \cos\alpha = 0.$ (2.4.4)

Nepoznati kut β ćemo izračunati iz zadanih dimenzija konzole:

$$\tan\beta = \frac{L_1}{L_2} = 0{,}208 \rightarrow \beta = 11{,}8°.$$

Iz jednadžbe (2.4.4) dobivamo silu u štapu 3

$$S_3 = S_{CD}\ \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 7350\ \text{N},$$

a iz jednadžbe (2.4.3) silu u štapu 2.

$$S_2 = S_{CD}\ \sin\alpha - S_3\ \cos\beta = -6695\ \text{N}.$$

3. KONKURENTNI SUSTAV SILA U PROSTORU

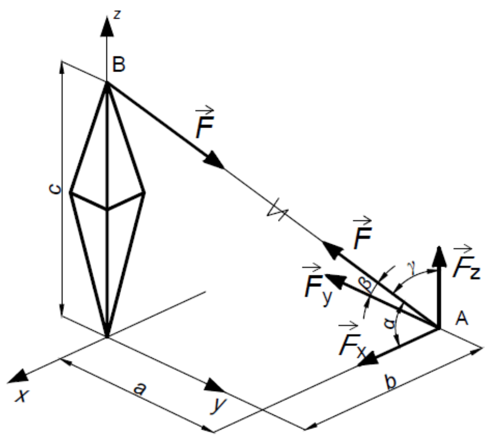
Zadatak 3.1.

Prema slici 3.1a, žica koja pridržava toranj jednim je krajem pričvršćena na vrh tornja u točki B, a drugim krajem o čvrstu podlogu u točki A.

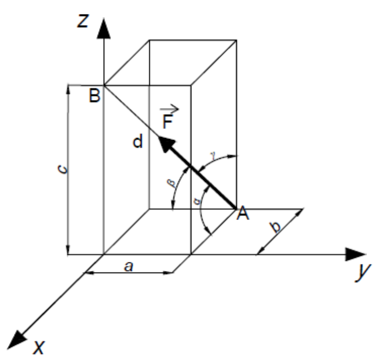
Ako sila u žici iznosi F = 2500 N, potrebno je:

a) odrediti kutove α, β i γ koje pravac djelovanja sile F zatvara s koordinatnim osima
b) odrediti komponente F_x, F_y i F_z sile F prema zadanom koordinatnom sistemu
c) silu F prikazati u vektorskom obliku.

Zadano: a = 10 m, b = 7,5 m, c = 20 m.



Slika 3.1a: *Prikaz položaja žice koja pridržava toranj*



Slika 3.1b: *Pravac djelovanja sile F*

Za određivanje kutova koristit ćemo dimenzije kvadra sa slike 3.1b koje su određene položajem točaka A i B. Također, koristit ćemo i činjenicu da se pravac djelovanja sile *F* poklapa s prostornom dijagonalom *d* kvadra. To znači da su kutovi koje prostorna dijagonala zatvara s bridovima kvadra, upravo kutovi koje pravac djelovanja sile *F* zatvara s koordinatnim osima.

Iz zadanih dimenzija, duljina prostorne dijagonale iznosi:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{10^2 + 7{,}5^2 + 20^2} = \sqrt{556{,}25} = 23{,}58 \text{ m.}$$

Kutove α, β i γ dobivamo iz sljedećih trigonometrijskih odnosa:

$$\cos\alpha = \frac{b}{d} = 0{,}318 \;\rightarrow \alpha = 71{,}5°,$$

$$\cos\beta = \frac{a}{d} = 0{,}424 \;\rightarrow \beta = 64{,}9°,$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{d} = 0{,}848 \;\rightarrow \gamma = 32°.$$

Komponente sile *F* su izračunate kako slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F\ \cos\alpha = 795 \text{ N},$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F\ \cos\beta = 1060 \text{ N},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} \rightarrow F_z = F\ \cos\gamma = 2120 \text{ N}.$$

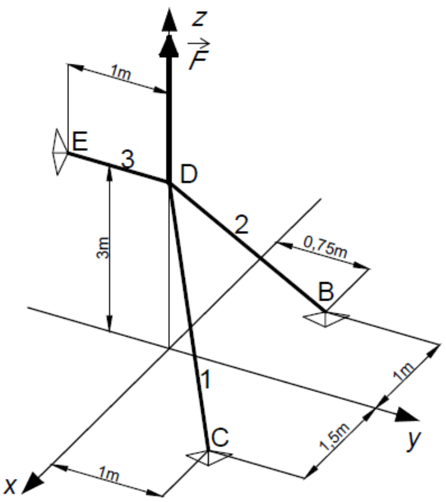
Uzimajući u obzir smjer komponenti u zadanom koordinatnom sistemu, silu *F* možemo prikazati u vektorskom obliku.

$$\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} - F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k} = (795 \text{ N})\,\vec{\imath} - (1060 \text{ N})\,\vec{\jmath} + (2120 \text{ N})\,\vec{k}\ .$$

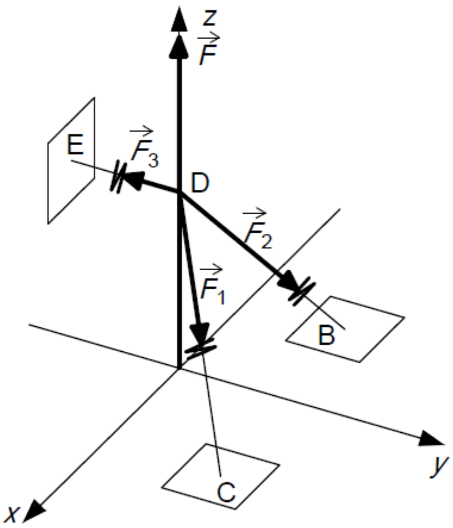
Zadatak 3.2.

Prema prikazanom na slici 3.2a, tri užeta su pričvršćena o čvrste i krute podloge u točkama C, B i E, te spojena u točki D gdje djeluje sila F = 30 kN.

Potrebno je izračunati silu u svakom užetu.



Slika 3.2a: *Položaj užadi*



Slika 3.2b: *Reaktivne sile u užadima*

Reaktivne sile u užadima su prikazane na slici 3.2b. Pravci djelovanja reaktivnih sila i vanjske sile F se sijeku u točki D, što znači da ćemo promatrati ravnotežu konkurentnog sustava sila u prostoru.

Da bismo postavili jednadžbe ravnoteže moramo izračunati kutove koje pravci djelovanja sila u užadima F_1, F_2 i F_3 zatvaraju s pojedinom koordinatnom osi. Za izračunavanje ćemo koristiti prikazane dimenzije, tj. koordinate točaka B, C, D i E.

Također, koristit ćemo i činjenicu da se dužina $\overline{DC}$ poklapa s pravcem djelovanja sile F_1. Drugim riječima, kutovi koje dužina $\overline{DC}$ zatvara s koordinatnim osima su upravo kutovi koje pravac djelovanja sile F_1 zatvara s koordinatnim osima. Isto vrijedi i za dužinu $\overline{DB}$ i pravac djelovanja sile F_2,te dužinu $\overline{DE}$ i pravac djelovanja sile F_3.

Počinjemo s određivanjem pravca djelovanja i smjera vektora sile F_1. Projekcije dužine $\overline{DC}$ na pojedinu koordinatnu os, kao i dužina $\overline{DC}$ su izračunati na sljedeći način:

Sila F_1:

$\overline{DC}_x = x_C - x_D = 1{,}5 - 0 = 1{,}5$ m ,

$\overline{DC}_y = y_C - y_D = 1 - 0 = 1$ m ,

$\overline{DC}_z = z_C - z_D = 0 - 3 = -3$ m .

$\overline{DC} = \sqrt{(\overline{DC}_x)^2 + (\overline{DC}_y)^2 + (\overline{DC}_z)^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 1^2 + (-3)^2} = 3{,}5$ m .

Sada možemo izračunati kutove α_1, β_1 i γ_1 koje pravac djelovanja sile F_1 zatvara s koordinatnim osima. Nakon toga računamo i komponente sile F_1 u odnosu na pojedinu koordinatnu os.

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{DC}_x}{\overline{DC}} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = 0{,}429 \rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{F_{1x}}{F_1} \rightarrow F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1 ,$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{DC}_y}{\overline{DC}} = \frac{1}{3{,}5} = 0{,}286 \rightarrow \cos\beta_1 = \frac{F_{1y}}{F_1} \rightarrow F_{1y} = F_1 \cos\beta_1 ,$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\overline{DC}_z}{\overline{DC}} = \frac{-3}{3{,}5} = -0{,}857 \rightarrow \cos\gamma_1 = \frac{F_{1z}}{F_1} \rightarrow F_{1z} = F_1 \cos\gamma_1 .$$

Silu F_1 možemo prikazati u vektorskom obliku koristeći jedinične vektore, te komponente po koordinatnim osima. Taj će nam prikaz biti potreban za postavljanje vektorske jednadžbe ravnoteže iz koje proizlaze tri analitičke jednadžbe ravnoteže.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{1z} = F_{1x}\,\vec{\imath} + F_{1y}\,\vec{\jmath} + F_{1z}\,\vec{k} = F_1 \cos\alpha_1\,\vec{\imath} + F_1 \cos\beta_1\,\vec{\jmath} + F_1 \cos\gamma_1\,\vec{k}.$$

Istim ćemo postupkom odrediti pravce djelovanja i smjerove vektora sila F_2 i F_3.

Sila F_2:

$\overline{DB}_x = x_B - x_D = -1 - 0 = -1$ m ,

$\overline{DB}_y = y_B - y_D = 0{,}75 - 0 = 0{,}75$ m ,

$\overline{DB}_z = z_B - z_D = 0 - 3 = -3$ m .

$\overline{DB} = \sqrt{(\overline{DB}_x)^2 + (\overline{DB}_y)^2 + (\overline{DB}_z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0{,}75^2 + (-3)^2} = 3{,}25$ m.

$$\cos\alpha_2 = \frac{\overline{DB}_x}{\overline{DB}} = \frac{-1}{3{,}25} = -0{,}307 \rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{F_{2x}}{F_2} \rightarrow F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 ,$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\overline{DB}_y}{\overline{DB}} = \frac{0{,}75}{3{,}25} = 0{,}231 \rightarrow \cos\beta_2 = \frac{F_{2y}}{F_2} \rightarrow F_{2y} = F_2 \cos\beta_2 ,$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\overline{DB}_z}{\overline{DB}} = \frac{-3}{3{,}25} = -0{,}923 \rightarrow \cos\gamma_2 = \frac{F_{2z}}{F_2} \rightarrow F_{2z} = F_2 \cos\gamma_2 .$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{2z} = F_{2x}\,\vec{\imath} + F_{2y}\,\vec{\jmath} + F_{2z}\,\vec{k} = F_2 \cos\alpha_2\,\vec{\imath} + F_2 \cos\beta_2\,\vec{\jmath} + F_2 \cos\gamma_2\,\vec{k}.$$

Sila F_3:

$\overline{DE}_x = x_E - x_D = 0 - 0 = 0$ m ,

$\overline{DE}_y = y_E - y_D = -1 - 0 = -1$ m ,

$\overline{DE}_z = z_E - z_D = 3 - 3 = 0$ m .

$\overline{DE} = \sqrt{(\overline{DE}_x)^2 + (\overline{DE}_y)^2 + (\overline{DE}_z)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = 1$ m

$\cos\alpha_3 = \frac{\overline{DE}_x}{\overline{DE}} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow \cos\alpha_3 = \frac{F_{3x}}{F_3} \rightarrow F_{3x} = F_3 \cos\alpha_3 = 0$,

$\cos\beta_3 = \frac{\overline{DE}_y}{\overline{DE}} = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow \cos\beta_3 = \frac{F_{3y}}{F_3} \rightarrow F_{3y} = F_3 \cos\beta_3$,

$\cos\gamma_3 = \frac{\overline{DE}_z}{\overline{DE}} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow \cos\gamma_3 = \frac{F_{3z}}{F_3} \rightarrow F_{3z} = F_3 \cos\gamma_3 = 0$.

$\vec{F}_3 = \vec{F}_{3x} + \vec{F}_{3y} + \vec{F}_{3z} = F_{3x}\,\vec{\imath} + F_{3y}\,\vec{\jmath} + F_{3z}\,\vec{k} = 0\,\vec{\imath} + F_3 \cos\beta_3\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k}.$

Vanjska sila *F*:

Smjer djelovanja vanjske sile *F*, te njezin intenzitet i komponente po koordinatnim osima su zadani kao što slijedi:

$F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = F$.

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + F\,\vec{k}.$

Kao što je već prije navedeno, prvo postavljamo vektorsku jednadžbu ravnoteže. Vektorski uvjet ravnoteže za konkurentni sustav sila u prostoru glasi:

$\sum \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

U tu jednadžbu uvrštavamo sile u vektorskom zapisu pa dobivamo

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i = \quad & 0\,\vec{\imath} && + \quad 0\,\vec{\jmath} && + \quad F\,\vec{k} && + \\ & F_1 \cos\alpha_1\,\vec{\imath} && + F_1 \cos\beta_1\,\vec{\jmath} && + F_1 \cos\gamma_1\,\vec{k} && + \\ & F_2 \cos\alpha_2\,\vec{\imath} && + F_2 \cos\beta_2\,\vec{\jmath} && + F_2 \cos\gamma_2\,\vec{k} && + \\ & 0\,\vec{\imath} && + F_3 \cos\beta_3\,\vec{\jmath} && + \quad 0\,\vec{k} && = \vec{0}\,. \qquad (3.2.1)\end{aligned}$$

Iz vektorskog uvjeta ravnoteže izvodimo tri analitička uvjeta ravnoteže.

$\sum F_x = 0 \rightarrow 0 + F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + 0 = 0,$ (3.2.2)

$\sum F_y = 0 \rightarrow 0 + F_1 \cos\beta_1 + F_2 \cos\beta_2 + F_3 \cos\beta_3 = 0,$ (3.2.3)

$\sum F_z = 0 \rightarrow F + F_1 \cos\gamma_1 + F_2 \cos\gamma_2 + 0 = 0.$ (3.2.4)

Gornji sustav jednadžbi ćemo riješiti na sljedeći način:

Izraz za silu F_1 iz jednadžbe (3.2.2),

$$F_1 = -F_2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \tag{3.2.5}$$

uvrštavamo u jednadžbu (3.2.4), te time dobivamo

$$F - F_2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \cos\gamma_1 + F_2 \cos\gamma_2 = 0.$$

Nakon sređivanja i uvrštavanja izračunatih vrijednosti za kutove dobivamo izraz i rezultat za silu u užetu 2.

$$F_2 = \frac{-F}{\cos\gamma_2 - \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \cos\gamma_1} = 19{,}5 \text{ N}.$$

Uz izračunatu silu F_2, intenzitet sile F_1 iz jednadžbe (3.2.5) je: F_1 = 14 kN.

Iz jednadžbe (3.2.3), uz izračunate vrijednosti za kutove, dobivamo intenzitet sile F_3.

$$F_3 = \frac{-F_1 \cos\beta_1 - F_2 \cos\beta_2}{\cos\beta_3} = 8{,}5 \text{ kN}.$$

Za kraj slijedi vektorski zapis sila u užadima:

$\vec{F}_1 = (6 \text{ kN})\,\vec{\imath} + (4 \text{ kN})\,\vec{\jmath} - (12 \text{ kN})\,\vec{k},$

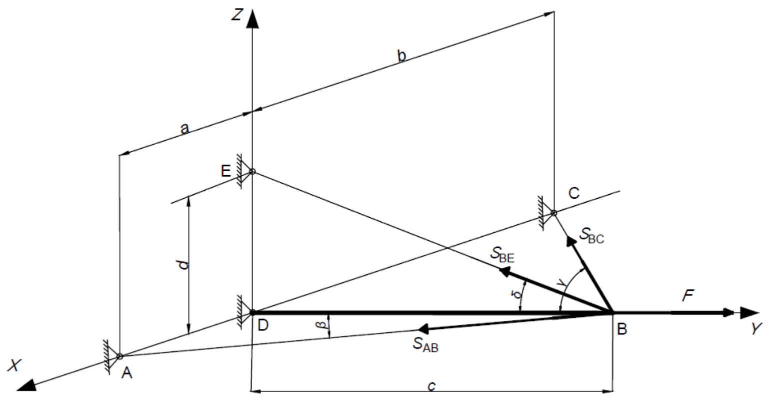
$\vec{F}_2 = -(5{,}9 \text{ kN})\,\vec{\imath} + (4{,}5 \text{ kN})\,\vec{\jmath} - (18 \text{ kN})\,\vec{k},$

$\vec{F}_3 = -(8.5 \text{ kN})\,\vec{\jmath}.$

Zadatak 3.3.

Nosač BD, prikazan na slici 3.3a, se u stanju ravnoteže održava pomoću užadi AB, BC i BE, a u točki B je opterećen silom F. Potrebno je izračunati sile u sva tri užeta.

Zadano: F = 1000 N, a = 4 m, b = 3 m, c = 6 m, d = 4 m.



Slika 3.3a: *Zadani ravnotežni položaj nosača*

Da bi postavili jednadžbe ravnoteže potrebno je izračunati kutove β, γ i δ koje pravci nepoznatih sila zatvaraju s koordinatnim osima. Koristeći priložene dimenzije prikazane na slici 3.3a, kutove možemo izračunati na sljedeći način:

$$\tan\beta = \frac{a}{c} = 0{,}667 \rightarrow \beta = 33{,}7°,$$

$$\tan\gamma = \frac{b}{c} = 0{,}5 \rightarrow \gamma = 26{,}6°,$$

$$\tan\delta = \frac{d}{c} = 0{,}667 \rightarrow \delta = 33{,}7°.$$

Uvjeti ravnoteže konkurentnog sustava sila čiji se pravci djelovanja sijeku u točki B su:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{AB}\ \sin\beta - S_{BC}\ \sin\gamma = 0, \qquad (3.3.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow - S_{AB}\ \cos\beta - S_{BC}\ \cos\gamma - S_{BE}\ \cos\delta + F = 0, \qquad (3.3.2)$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow S_{BE}\ \sin\delta = 0. \qquad (3.3.3)$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi dobiju se traženi iznosi za sile u užadima.

S_{BE} = 0 N , S_{BC} = 638,8 N , S_{AB} = 515,5 N.

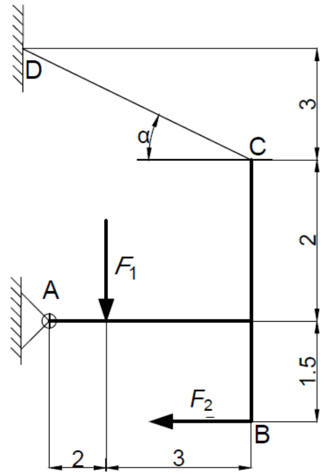
4. PROIZVOLJNI SUSTAV SILA U RAVNINI

Zadatak 4.1.

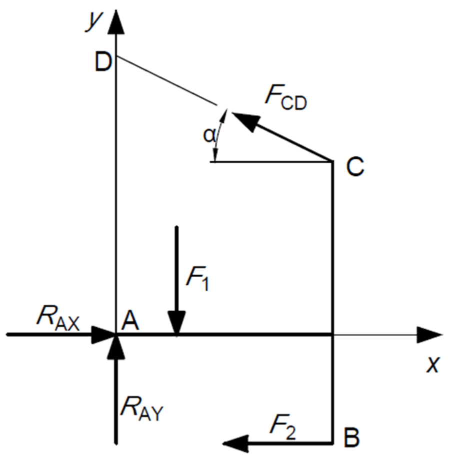
Štapna konstrukcija ABC je opterećena s dvije sile, a u stanju ravnoteže se održava pomoću nepomičnog oslonca A i užeta CD. Dimenzije na slici 4.1a su prikazane u metrima.

Potrebno je izračunati reakcije u osloncu A i silu užetu CD.

Zadano: F_1 = 100 N, F_2 = 200 N.



Slika 4.1a: *Štapna konstrukcija*



Slika 4.1b: *Štapna konstrukcija oslobođena od veza*

Za izračunavanje nepoznatih veličina, a koristeći prikaz reakcija na slici 4.1b, postavit ćemo tri jednadžbe ravnoteže kako slijedi:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} - F_{CD}\cos\alpha - F_2 = 0, \qquad (4.1.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + F_{CD}\sin\alpha - F_1 = 0, \qquad (4.1.2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{CD}\cos\alpha \cdot 2 + F_{CD}\sin\alpha \cdot 5 - F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 1{,}5 = 0. \qquad (4.1.3)$$

Kut α ćemo izračunati iz zadanih dimenzija konstrukcije sa slike 4.1a.

$$\tan\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \rightarrow \alpha = 30{,}9°.$$

Iz jednadžbe (4.1.3) izračunavamo nepoznatu silu u užetu.

$$F_{CD} = \frac{2F_1 + 1{,}5F_2}{2\cos\alpha + 5\sin\alpha} = 116{,}7 \text{ N},$$

a iz jednadžbi (4.1.1) i (4.1.2) preostale dvije nepoznanice.

$$R_{Ax} = F_{CD} \cos\alpha + F_2 = 300{,}1 \text{ N},$$

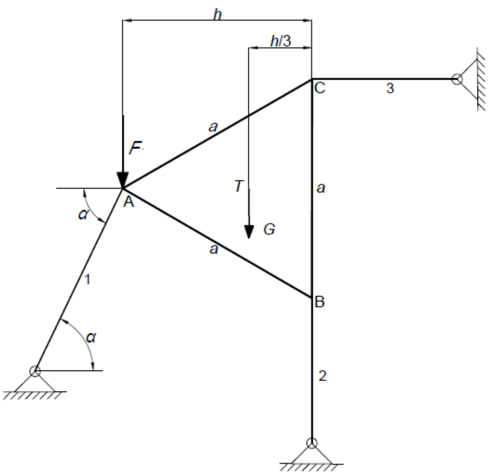
$$R_{Ay} = F_1 - F_{CD} \sin\alpha = 40 \text{ N}.$$

Zadatak 4.2.

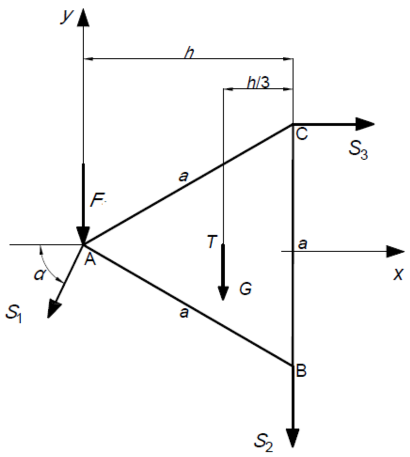
Homogena ploča ABC, u obliku istostraničnog trokuta, prikazana na slici 4.2a, se u stanju ravnoteže održava s tri štapa, a u točki A je opterećena silom *F*. Ploča je težine *G*.

Potrebno je izračunati sile u štapovima.

Zadano: *F* = 200 N, *G* = 100 N, *α* = 60º.



Slika 4.2a: *Homogena ploča*



Slika 4.2b: *Homogena ploča oslobođena od veza*

Za izračunavanje sila u štapovima čiji su pretpostavljeni smjerovi prikazani na slici 4.2b, postavit ćemo tri jednadžbe ravnoteže kako slijedi:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_1 \cos\alpha + S_3 = 0 \rightarrow S_3 = S_1 \cos\alpha, \qquad (4.2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F - G - S_1 \sin\alpha - S_2 = 0, \qquad (4.2.2)$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F \cdot h + G \cdot \frac{h}{3} - S_3 \cdot a + S_1 \cos\alpha \cdot \frac{a}{2} + S_1 \sin\alpha \cdot h = 0. \qquad (4.2.3)$$

Visinu *h* istostraničnog trokuta, možemo iz zadanih dimenzija sa slike 4.2a izračunati na sljedeći način:

$$h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87\ a.$$

Ako visinu *h*, zajedno s izrazom za S_3 iz jednadžbe (4.2.1), uvrstimo u jednadžbu (4.2.3) dobivamo:

$$F \cdot 0{,}87a + G \cdot 0{,}29 \cdot a - S_1\ \cos\alpha \cdot a + S_1 \cos\alpha \cdot 0{,}5 \cdot a + S_1\ \sin\alpha \cdot 0{,}87\ a = 0.$$

Nakon sređivanja i uvrštavanja zadanih vrijednosti slijedi rezultat za nepoznatu silu u štapu 1.

$$S_1 = \frac{-0{,}87\ F - 0{,}29\ G}{0{,}87\ \sin\alpha - 0{,}5\ \cos\alpha} = -403{,}2\ \text{N}.$$

Nakon toga, iz jednadžbi (4.2.1) i (4.2.2) dobivamo i rezultate za sile u štapovima 1 i 2.

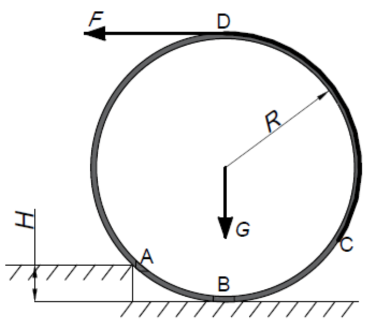
$$S_3 = S_1\ \cos\alpha = -201{,}6\ \text{N},$$

$$S_2 = -F - G - S_1\ \sin\alpha = -200 - 100 - (-403{,}2)\ \sin 60° = 49{,}2\ \text{N}.$$

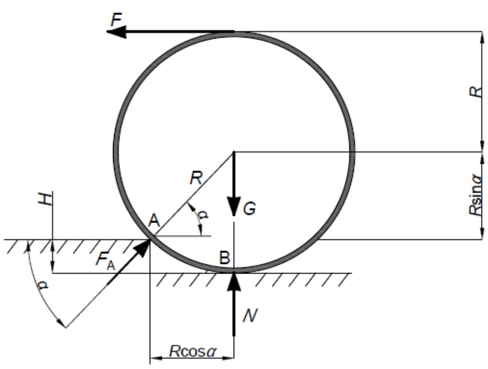
Zadatak 4.3.

Cilindar težine *G* i polumjera *R,* prikazan na slici 4.3a, treba prebaciti preko stepenice visine *H* povlačenjem užeta DC. Treba odrediti potrebnu veličinu sile *F* za ostvarenje zadanog gibanja.

Zadano: G = 500 N, R = 4 m, H = 1 m.



Slika 4.3a: *Cilindar težine G*



Slika 4.3b: *Cilindar oslobođen od veza*

Za prebacivanje valjka preko stepenice potrebno je ostvariti njegovo gibanje oko točke A.

Jednadžbu ravnoteže ćemo postaviti uz uvjet da je u trenutku prebacivanja reaktivna sila podloge jednaka nuli , tj. $N = 0$.

$\sum M_A = 0 \rightarrow G \cdot R \cos\alpha - F\,(R + R\sin\alpha) = 0.$ (4.3.1)

Kut α sa slike 4.3b je izračunat iz zadanih dimenzija.

$$\sin\alpha = \frac{R - H}{R} = 0{,}75 \rightarrow \alpha = 48{,}6°.$$

Iz jednažbe ravnoteže (4.3.1) dobivamo silu F potrebnu za ostvarenje zadanog gibanja.

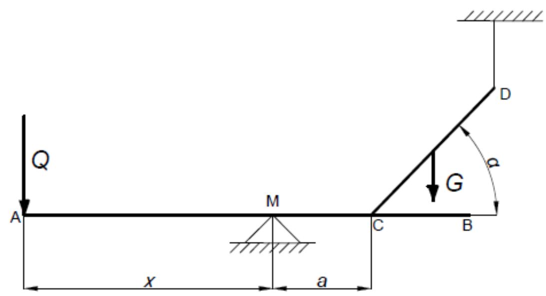
$$F = \frac{G\ \cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = 188{,}9 \text{ N}.$$

Zadatak 4.4.

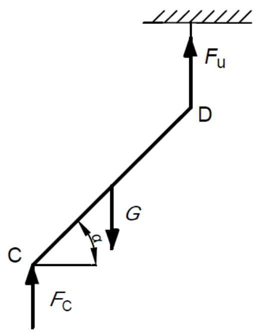
Greda AB duljine L_1 i zanemarive težine, prikazana na slici 4.4a, je oslonjena na oslonac M. Na nju se u točki C oslanja greda CD, težine G i duljine L_2, čiji je drugi kraj užetom vezan za strop. Na gredu AB djeluje teret Q.

Potrebno je odrediti duljinu x za ravnotežni položaj greda, ako su zadani sljedeći podaci:

$L_1 = 3$ m, $L_2 = 2$ m, $a = 1$ m, $G = 100$ N, $Q = 30$ N, $\alpha = 40°$.



Slika 4.4a: *Ravnotežni položaj greda*



Slika 4.4b: *Greda CD oslobođena od veza*

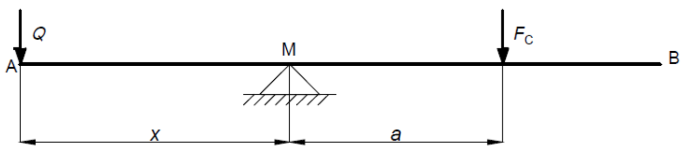
Za ravnotežu grede CD, prema slici 4.4b, vrijedi:

$\sum M_D = F_C \cdot L_2 \cos\alpha - G \cdot \frac{L_2}{2} \cos\alpha = 0.$ (4.4.1)

Iz te jednadžbe ravnoteže dobivamo rezultat za reakciju u točki C.

$F_C = 0{,}5\, G = 50$ N.

Rezultat za traženu duljinu *x* dobivamo iz ravnoteže grede AB, prema slici 4.4c.



Slika 4.4c: *Greda AB oslobođena od veza*

$\sum M_M = Q \cdot x - F_C \cdot a = 0.$ (4.4.2)

$x = \dfrac{F_C \cdot a}{Q} = 1{,}67$ m.

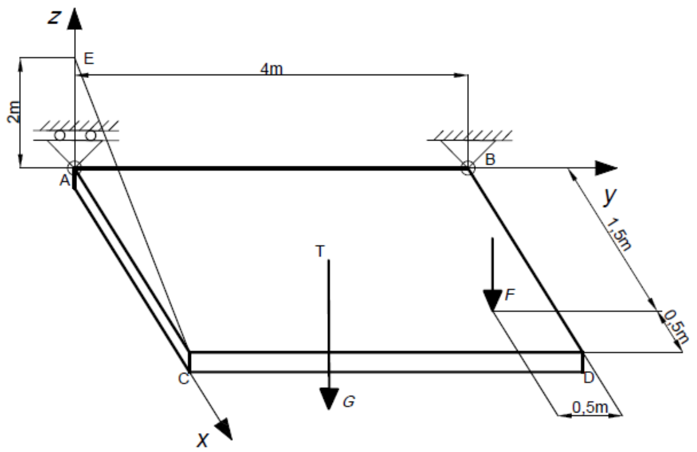
5. PROIZVOLJNI SUSTAV SILA U PROSTORU

Zadatak 5.1.

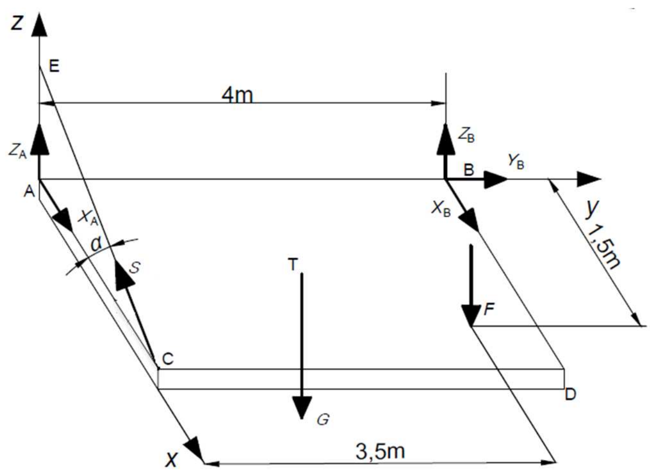
Ploča ABCD, težine G, opterećena je silom F prema slici 5.1a. U ravnotežnom položaju se održava pomoću oslonaca A (pomični) i B (nepomični) te pomoću užeta CE.

Potrebno je odrediti silu u užetu i reakcije u osloncima A i B.

Zadano: F = 500 N, G = 1000 N.



Slika 5.1a: *Homogena ploča*



Slika 5.1b: *Ploča oslobođena od veza*

Pretpostavljeni smjerovi reakcija u osloncima i užetu su prikazani na slici 5.1b. Zbog ukupnog broja nepoznanica potrebno je postaviti šest jednadžbi ravnoteže.

$\sum F_x = 0 \rightarrow X_A + X_B - S\ \cos\alpha = 0,$ (5.1.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow Y_B = 0,$ (5.1.2)

$\sum F_z = 0 \rightarrow Z_A + Z_B + S\ \sin\alpha - G - F = 0,$ (5.1.3)

$\sum M_x = 0 \rightarrow F \cdot 3{,}5 + G \cdot 2 - Z_B \cdot 4 = 0,$ (5.1.4)

$\sum M_y = 0 \rightarrow S\ \sin\alpha \cdot 2 - F \cdot 1{,}5 - G \cdot 1 = 0,$ (5.1.5)

$\sum M_z = 0 \rightarrow X_B \cdot 4 = 0 \rightarrow X_B = 0.$ (5.1.6)

Prema zadanim dimenzijama sa slike 5.1a, kut $\alpha = 45°$.

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi dobiju se traženi iznosi reakcija.

Iz jednadžbe (5.1.4):

$$Z_B = \frac{3{,}5\ F + 2\ G}{4} = 937{,}5\ \text{N}.$$

Iz jednadžbe (5.1.5):

$$S = \frac{1{,}5\ F + G}{2\ \sin\alpha} = 1237{,}4\ \text{N}.$$

Iz jednadžbe (5.1.1):

$$X_A = S\ \cos\alpha = 875\ \text{N}.$$

Iz jednadžbe (5.1.3):

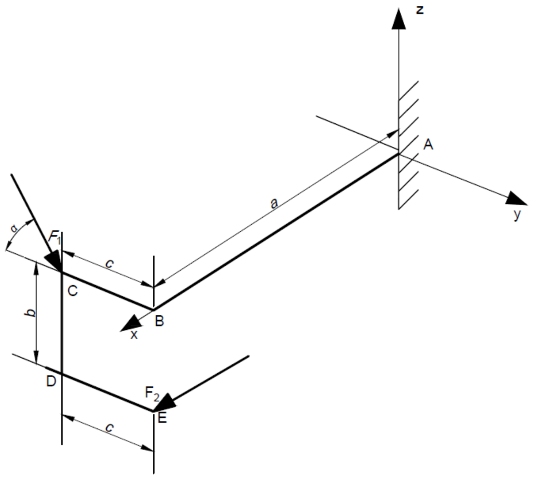
$$Z_A = -Z_B - S\ \sin\alpha + G + F = -\ 312{,}5\ \text{N}.$$

Zadatak 5.2.

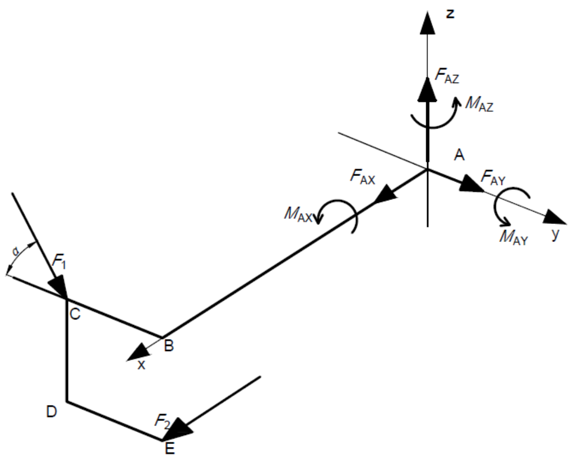
Zakrivljeni štap ABCDE, prikazan na slici 5.2a, ukliješten je u točki A i opterećen s 2 sile u točkama C i E.

Potrebno je odrediti reakcije u uklještenju A.

Zadano: F_1 =1000 N, F_2 = 2000 N, a = 5 m, b = 2 m, c = 3 m, α = 30º.



Slika 5.2a: *Štap ABCDE*



Slika 5.2b: *Štap oslobođen od veza*

Nepoznate reakcije u uklještenju A su tri reaktivne sile i tri reaktivna momenta kao što je prikazano na slici 5.2b.

Jednadžbe ravnoteže i rješenja koja iz njih slijede su:

$$\sum F_{\mathrm{x}} = 0 \rightarrow F_2 + F_{\mathrm{Ax}} = 0 \rightarrow F_{\mathrm{Ax}} = -F_2 = -2000 \text{ N}, \tag{5.2.1}$$

$$\sum F_{\mathrm{y}} = 0 \rightarrow F_1 \cos\alpha + F_{\mathrm{Ay}} = 0 \rightarrow F_{\mathrm{Ay}} = -F_1 \cos\alpha = -866 \text{ N}, \tag{5.2.2}$$

$$\sum F_{\mathrm{z}} = 0 \rightarrow F_{\mathrm{Az}} - F_1 \sin\alpha = 0 \rightarrow F_{\mathrm{Az}} = F_1 \sin\alpha = 500 \text{ N}, \tag{5.2.3}$$

$$\sum M_{\mathrm{x}} = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Ax}} + F_1 \sin\alpha \cdot c = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Ax}} = -F_1 \sin\alpha \cdot c = -1500 \text{ N}, \tag{5.2.4}$$

$$\sum M_{\mathrm{y}} = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Ay}} + F_1 \sin\alpha \cdot a - F_2 \cdot b = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Ay}} = -F_1 \sin\alpha \cdot c + F_2 \cdot b = 2500 \text{ N}, \tag{5.2.5}$$

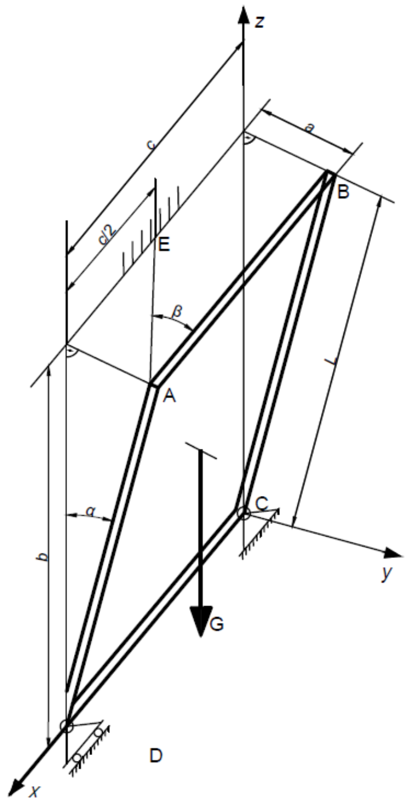
$$\sum M_{\mathrm{x}} = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Az}} + F_1 \cos\alpha \cdot a = 0 \rightarrow M_{\mathrm{Az}} = -F_1 \cos\alpha \cdot a = -4330 \text{ N}. \tag{5.2.6}$$

Zadatak 5.3.

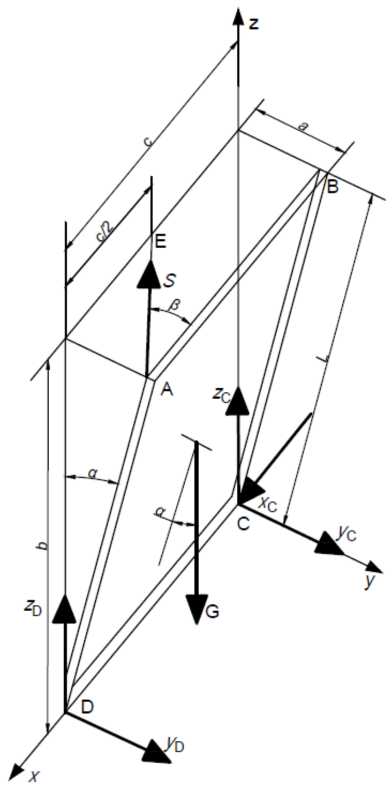
Ploča ABCD težine *G*, i dimenzija prema slici 5.3a, oslonjena je na nepomični oslonac u točki C i pomični oslonac u točki D. U ravnotežnom položaju se održava pomoću užeta AE.

Potrebno je izračunati reakcije u osloncima C i D, te silu u užetu.

Zadano: $G = 1000$ N, $b = 4$ m, $c = 4$ m, $\alpha = 30^{o}$.



Slika 5.3a: *Ravnotežni položaj ploče*



Slika 5.3b: *Ploča oslobođena od veza*

Za izračunavanje reaktivnih sila u osloncima i užetu, prikazanih na slici 5.3b, potrebno je šest jednadžbi ravnoteže, a to su:

$$\sum F_{\mathrm{x}} = 0 \rightarrow X_{\mathrm{C}} - S\ \cos\beta = 0, \tag{5.3.1}$$

$$\sum F_{\mathrm{y}} = 0 \rightarrow Y_{\mathrm{D}} + Y_{\mathrm{C}} - S\ \sin\beta = 0, \tag{5.3.2}$$

$$\sum F_{\mathrm{z}} = 0 \rightarrow Z_{\mathrm{D}} + Z_{\mathrm{C}} - G = 0, \tag{5.3.3}$$

$$\sum M_{\mathrm{x}} = 0 \rightarrow S\ \sin\beta \cdot b - G \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha = 0, \tag{5.3.4}$$

$$\sum M_{\mathrm{y}} = 0 \rightarrow -Z_{\mathrm{D}} \cdot c - S\ \cos\beta \cdot b + G \cdot \frac{c}{2} = 0, \tag{5.3.5}$$

$$\sum M_{\mathrm{z}} = 0 \rightarrow Y_{\mathrm{D}} \cdot c - S\ \sin\beta \cdot c + S\ \cos\beta \cdot a = 0. \tag{5.3.6}$$

Dimenzije a i L , te kut β ćemo izračunati iz zadanih podataka sa slike 5.3a.

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \rightarrow a = b\ \tan\alpha = 2{,}31$ m,

$L = \sqrt{a^2 + b^2} = 4{,}61$ m,

$\tan\beta = \frac{a}{\frac{c}{2}} = 1{,}16 \rightarrow \beta = 49°$.

Rješenja za nepoznanice slijede iz jednadžbi ravnoteže.

Iz jednadžbe (5.3.4):

$S = \frac{G\ \frac{L}{2}\sin\alpha}{b\ \sin\beta} = 381{,}8$ N.

Iz jednadžbe (5.3.5):

$Z_{\mathrm{D}} = \frac{G\ \frac{c}{2} - S\ \cos\beta \cdot b}{c} = 249{,}5$ N.

Iz jednadžbe (5.3.3):

$Z_{\mathrm{C}} = G - Z_{\mathrm{D}} = 750{,}5$ N.

Iz jednadžbe (5.3.1):

$X_{\mathrm{C}} = S\ \cos\beta = 250{,}5$ N.

Iz jednadžbe (5.3.6):

$Y_{\mathrm{D}} = \frac{S\ \sin\beta \cdot c - S\ \cos\beta \cdot a}{c} = 143{,}5$ N.

Iz jednadžbe (5.3.2):

$Y_{\mathrm{C}} = -Y_{\mathrm{D}} + S\ \sin\beta = 144{,}6$ N.

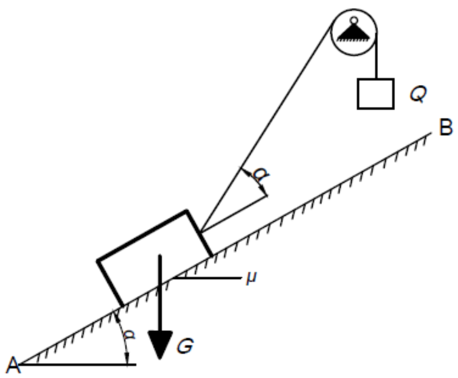
6. TRENJE KLIZANJA

Zadatak 6.1.

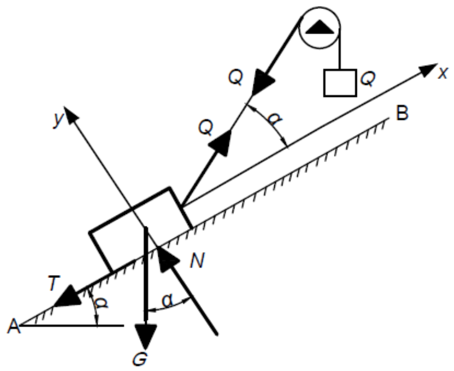
Predmet težine G giba se jednoliko uz hrapavu kosinu AB pomoću utega Q, prikazano na slici 6.1a. Uže kojim je predmet povezan s utegom je prebačeno preko koloture bez trenja.

Potrebno je odrediti težinu utega Q da bi se ostvarilo zadano gibanje.

Zadano: G = 100 N, $\alpha = 30^{o}$, μ = 0,1.



Slika 6.1a: *Predmet na kosini*



Slika 6.1b: *Predmet oslobođen od veza*

Kao što je prikazano na slici 6.1b, smjer sile trenja je suprotan od smjera zadanog gibanja.

Jednadžbe ravnoteže su kako slijede:

$\sum F_x = 0 \rightarrow -T - G \sin\alpha + Q\cos\alpha = 0,$ (6.1.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - G \cos\alpha + Q \sin\alpha = 0.$ (6.1.2)

Coulombov zakon trenja klizanja ćemo koristiti kao dopunsku jednadžbu.

$T = \mu N.$ (6.1.3)

Ako izraz za normalnu reakciju iz jednadžbe (6.1.2),

$N = G \cos\alpha - Q \sin\alpha,$

zajedno s Coulombovim zakonom uvrstimo u jednažbu (6.1.1) dobivamo:

$-\mu\,(G \cos\alpha - Q \sin\alpha) - G \sin\alpha + Q \cos\alpha = 0.$

Nakon sređivanja i uvrštavanja zadanih vrijednosti slijedi konačni izraz te rezultat za traženu težinu utega Q:

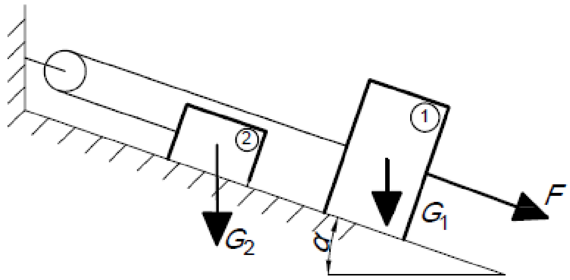
$$Q \geq \frac{G\,(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)}{\mu \sin\alpha + \cos\alpha} = 64 \text{ N}.$$

Zadatak 6.2.

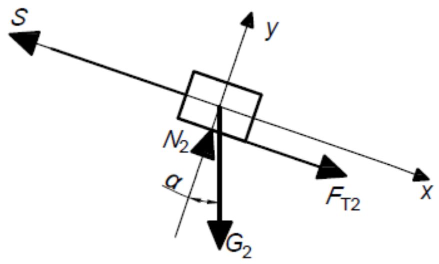
Kako je prikazano na slici 6.2a, dva su tijela povezana užetom koje je prebačeno preko koloture bez trenja.

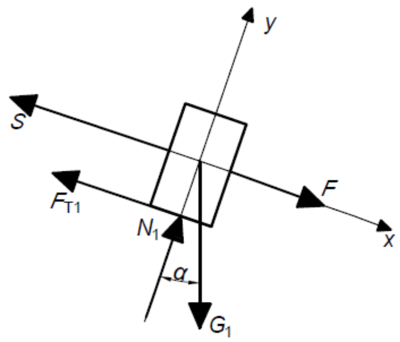
Potrebno je odrediti silu F da bi se predmet težine G_1 gibao jednoliko niz kosinu.

Zadano: G_1 = 200 N, G_2 = 180 N, α = 10º, μ = 0,2 .



Slika 6.2a: *Tijela na kosini*





Slika 6.2b: *Tijelo 2 oslobođeno od veza* Slika 6.2c: *Tijelo 1 oslobođeno od veza*

Na slikama 6.2b i 6.2c su prikazani smjerovi sila trenja koji su suprotni od zadanih smjerova gibanja tijela 1 i 2.

Uvjeti ravnoteže za tijelo 2, težine G_2 su:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -S + F_{T2} + G_2 \sin\alpha = 0, \qquad (6.2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 - G_2 \cos\alpha = 0. \qquad (6.2.2)$$

Kombinacijom ovih dviju jednadžbi, te uz Coulombov zakon

$F_{T2} = \mu\, N_2$, (6.2.3)

dobivamo rezultat za silu u užetu.

$S = \mu\, G_2\, \cos\alpha + G_2\, \sin\alpha = 66{,}7$ N.

Nastavljamo s uvjetima ravnoteže tijela 1, težine G_1, prikazano na slici 6.2c.

$\sum F_x = 0 \rightarrow F - S - F_{T1} + G_1\, \sin\alpha = 0,$ (6.2.4)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 - G_1\, \cos\alpha = 0.$ (6.2.5)

I ovdje koristimo Coulombov zakon kao dopunsku jednadžbu.

$F_{T1} = \mu\, N_1.$ (6.2.6)

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi dobivamo konačni izraz i rezultat za silu *F*.

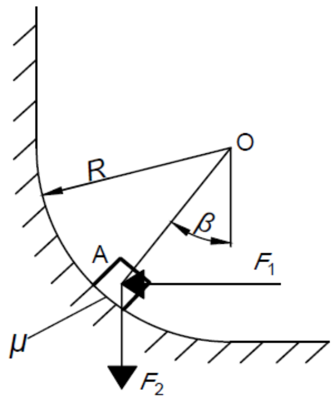
$F = S + G_1\, (\mu\, \cos\alpha - \sin\alpha) = 71{,}4$ N.

Zadatak 6.3

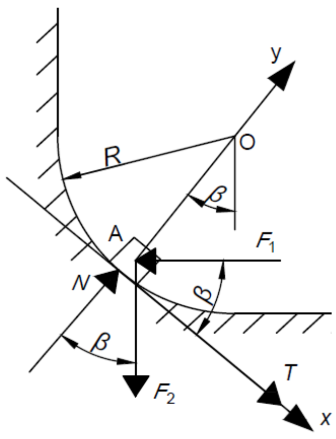
Na blok A, zanemarive težine, djeluju dvije sile, F_1 i F_2, usmjerene kako je prikazano na slici 6.3a.

Za zadani ravnotežni položaj bloka A, potrebno je odrediti veličinu sile F_1 da bi se blok gibao uz hrapavu zaobljenu površinu.

Zadano: F_2 = 800 N, *R*= 1m, μ = 0,35, β = 30º.



Slika 6.3a: *Zadani ravnotežni položaj bloka A*



Slika 6.3b: *Blok A oslobođen od veza*

Prema slici 6.3b, uvjeti ravnoteže bloka A su:

$\sum F_x = 0 \rightarrow T - F_1 \cos\beta + F_2 \sin\beta = 0,$ (6.3.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - F_2 \cos\beta - F_1 \sin\beta = 0,$ (6.3.2)

$T = \mu N$ (Coulombov zakon). (6.3.3)

Iz jednadžbe (6.3.2) dobivamo:

$N = F_2 \cos\beta + F_1 \sin\beta.$

Supstitucijom tog izraza i Coulombovog zakona u jednadžbu (6.3.1) dobivamo izraz i rezultat za traženu silu F_1.

$\mu\,(F_2 \cos\beta + F_1 \sin\beta) - F_1 \cos\beta + F_2 \sin\beta = 0,$

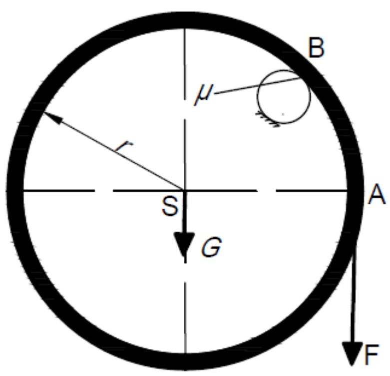
$$F_1 = \frac{F_2\,(\sin\beta + \mu \cos\beta)}{\cos\beta - \mu \sin\beta} = 929{,}8 \text{ N}.$$

Zadatak 6.4

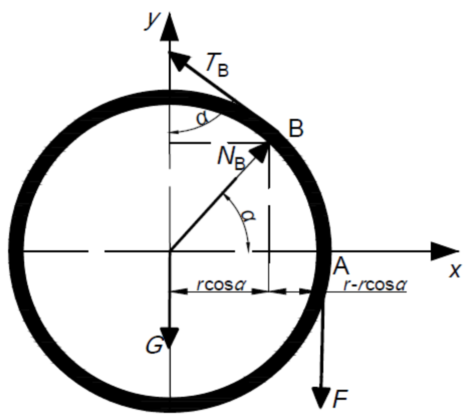
Homogeni prsten težine G se oslanja na mali kružni nepomični oslonac B. U točki A prstena djeluje sila F, prikazano na slici 6.4a.

Potrebno je odrediti minimalnu vrijednost koeficijenta trenja klizanja μ između prstena i nepomičnog oslonca da bi prsten bio u ravnotežnom položaju.

Zadano: G, r, $F = 0.4G$.



Slika 6.4a: *Homogeni prsten*



Slika 6.4b: *Prsten oslobođen od veza*

Nakon ucrtavanja reaktivnih sila u točki B, što je prikazano na slici 6.4b, vidljivo je da će osim koeficijenta trenja μ biti potrebno izračunati i kut α koji definira ravnotežni položaj prstena.

Dakle, potrebno je postaviti najmanje dvije jednadžbe ravnoteže, te koristiti Coulombov zakon kao dopunski izraz.

$\sum F_x = 0 \rightarrow N_B \cos\alpha - T_B \sin\alpha = 0,$ (6.4.1)

$T_B = \mu\, N_B\,.$ (6.4.2)

Supstitucijom (6.4.2) u (6.4.1) dobivamo izraz za koeficijent trenja u ovisnosti o kutu α.

$\mu = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$ (6.4.3)

Postavljamo jednadžbu ravnoteže za izračunavanje kuta α.

$\sum M_B = 0 \rightarrow G \cdot r \cdot \cos\alpha - F\,(r - r \cdot \cos\alpha) = 0.$ (6.4.4)

Nakon sređivanja i uvrštavanja zadanih vrijednosti slijedi rezultat za kut α.

$\cos\alpha = 0{,}286 \rightarrow \alpha = 73{,}4°.$

Uz poznati kut α, traženi koeficijent trenja je: μ = 0,298.

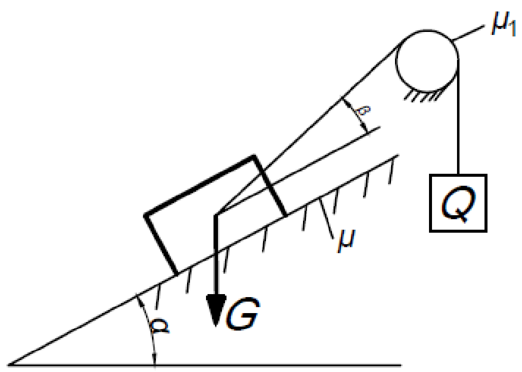
7. UŽETNO TRENJE

Zadatak 7.1

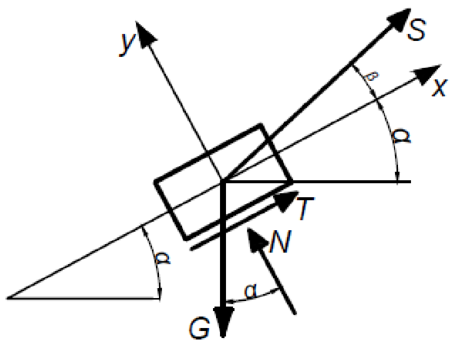
Slika 7.1a prikazuje blok težine G koji se nalazi na kosini pod kutom α. Blok je vezan užetom koje je prebačeno preko nepomične koloture, a na kraju užeta se nalazi uteg težine Q.

Potrebno je odrediti najmanju težinu utega Q koja je potrebna da spriječi klizanje bloka težine G niz kosinu.

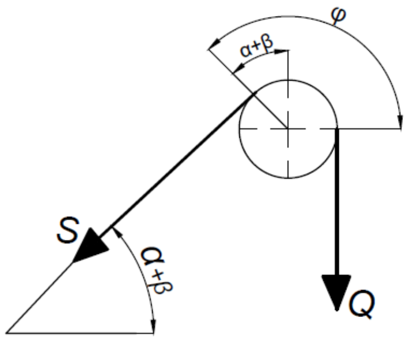
Zadano: $G = 1000$ N, $\alpha = \beta = 30^o$, $\mu = 0{,}2$, $\mu_1 = 0{,}3$.



Slika 7.1a: *Prikaz položaja bloka i utega*



Slika 7.1b: *Blok oslobođen od veza*



Slika 7.1c: *Sile na koloturi i prikaz obuhvatnog kuta*

Uvjeti ravnoteže za blok težine G, prema slici 7.1b, su:

$\sum F_x = 0 \rightarrow T - G \sin\alpha + S \cos\beta = 0,$ (7.1.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - G \cos\alpha + S \sin\beta = 0,$ (7.1.2)

$T = \mu N.$ (7.1.3)

Iz jednadžbe (7.1.2) dobivamo izraz za normalnu silu:

$N = G \cos\alpha - S \sin\beta.$

Supstitucijom tog izraza i Coulombovog zakona (7.1.3) u jednadžbu (7.1.1), dobivamo izraz i rezultat za silu u užetu.

$\mu\,(G \cos\alpha - S \sin\beta) - G \sin\alpha + S \cos\beta = 0,$

$$S = \frac{G\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)}{\cos\beta - \mu \sin\beta} = 426{,}6 \text{ N}.$$

Za granični slučaj ravnoteže, s ciljem da se spriječi klizanje bloka niz kosinu, vrijedi da je $Q < S$.

Obuhvatni kut φ možemo izračunati prema slici 7.1c.

$\varphi = 90° + \alpha + \beta = 150° = 2{,}618$ rad.

Primijenimo li Eulerovu jednadžbu za trenje užeta, potrebna minimalna težina utega Q će biti:

$Q = S \cdot e^{-\mu_1 \cdot \varphi} = 426{,}6 \cdot e^{-0{,}3 \cdot 2{,}618} = 194{,}5$ N.

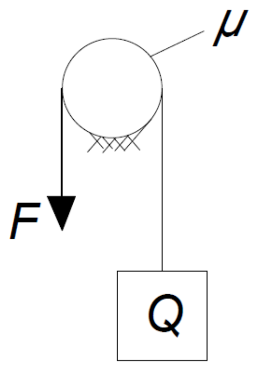
Zadatak 7.2

Uže je dva puta omotano preko nepomičnog kolotura te dodatno prebačeno preko pola opsega kolotura da bi pravci djelovanja zadanih sila bili vertikalni. Kako je prikazano na slici 7.2a, na jednom kraju užeta djeluje sila F, a na drugom kraju je obješen uteg težine Q.

Potrebno je izračunati veličinu sile F za:

a) jednoliko podizanje utega težine Q
b) jednoliko spuštanje utega težine Q.

Zadano: Q = 100 N, μ = 0,1.



Slika 7.2a: *Uže prebačeno preko nepomične koloture*

Za rješavanje će biti potrebno dva puta primijeniti Eulerovu jednadžbu užetnog trenja.

Obuhvatni kut φ je za oba slučaja isti. Zadano je da je uže dva puta omotano preko kolotura. Uz to, uže je dodatno prebačeno preko pola opsega kolotura da bi pravci djelovanja sila F i Q bili vertikalni i paralelni.

Tako je ukupni obuhvatni kut jednak:

$\varphi = 360^o + 360^o + 180^o = 2\pi + 2\pi + \pi = 5\pi$.

a) Za slučaj podizanja utega težine Q vrijedi da je $F > Q$. Eulerova jednadžba užetnog trenja te rezultat za silu F glasi:

$$F = Q \cdot e^{\mu \cdot \varphi} = 100 \cdot e^{0,1 \cdot 5 \cdot \pi} = 481 \text{ N}.$$

b) Za slučaj spuštanja utega težine Q vrijedi da je $F < Q$. Eulerova jednadžba užetnog trenja te rezultat za silu F glasi:

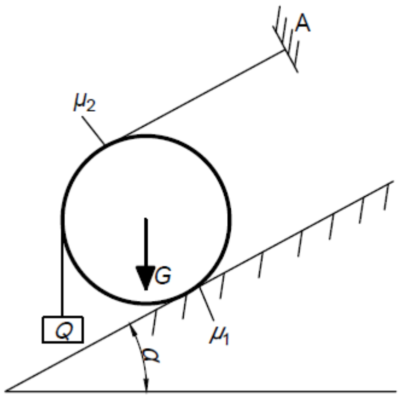
$$F = Q \cdot e^{-\mu \cdot \varphi} = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 5 \cdot \pi} = 20,8 \text{ N}.$$

Zadatak 7.3

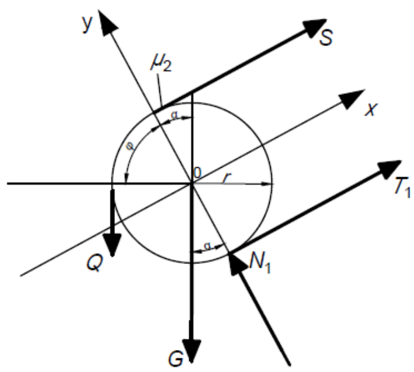
Valjak težine G se nalazi na hrapavoj kosini pod kutom α, prikazano na slici 7.3a. Preko valjka je prebačeno uže koje je paralelno s kosinom. Uže je jednim krajem vezano za čvrstu točku A, a na drugom je kraju obješen uteg težine Q.

Koliki moraju biti koeficijenti trenja μ_1 (između valjka i kosine) i μ_2 (između užeta i valjka) da sistem bude u položaju ravnoteže?

Zadano: Q = 50 N, G = 75 N, α = 30º.



Slika 7.3a: *Valjak na kosini*



Slika 7.3b: *Valjak oslobođen od veza*

Reakcije veza i vanjske aktivne sile su prikazane na slici 7.3b.

Uvjete ravnoteže valjka postavljamo kako slijedi:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S + T_1 - G\ \sin\alpha - Q\sin\alpha = 0, \qquad (7.3.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 - G\ \cos\alpha - Q\ \cos\alpha = 0, \qquad (7.3.2)$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow S\cdot r - Q\cdot r - T_1\cdot r = 0 \rightarrow S = T_1 + Q, \qquad (7.3.3)$$

$$T_1 = \mu_1 N_1. \qquad (7.3.4)$$

Iz jednadžbe (7.3.2) možemo izračunati normalnu reakciju podloge.

$$N_1 = (Q + G)\ \cos\alpha = 108{,}3\ \text{N}.$$

Uvrstimo li u jednadžbu (7.3.1) izraz za silu u užetu iz jednadžbe (7.3.3) te Coulombov zakon (7.3.4), nakon sređivanja dobivamo koeficijent trenja između valjka i kosine.

$$\mu_1 N_1 + Q + \mu_1 N_1 - G\ \sin\alpha - Q\sin\alpha = 0,$$

$$\mu_1 = \frac{(G+Q)\ \sin\alpha - Q}{2\,N_1} = 0{,}058.$$

Uz poznati koeficijent trenja μ_1, iz jednadžbe (7.3.3) dobivamo rezultat za silu u užetu.

$S = T_1 + Q = \mu_1 N_1 + Q = 56{,}3$ N .

Za zadani položaj ravnoteže vrijedi $S > Q$, pa Eulerova jednadžba užetnog trenja glasi:

$$S = Q \cdot e^{\mu_2 \cdot \varphi}. \qquad (7.3.5)$$

Obuhvatni kut φ izračunavamo prema slici 7.3b.

$\varphi = 90° - \alpha = 60° = 1{,}047$ rad.

Da bismo izračunali koeficijent trenja između užeta i valjka, Eulerovu jednadžbu (7.3.5) moramo logaritmirati.

$$S = Q \cdot e^{\mu_2 \cdot \varphi} \quad / \ln ,$$

$$\ln S = \ln Q + \mu_2 \cdot \varphi \cdot \ln e,$$

$$\mu_2 = \frac{\ln S - \ln Q}{\varphi \ \ln e} = 0{,}113.$$

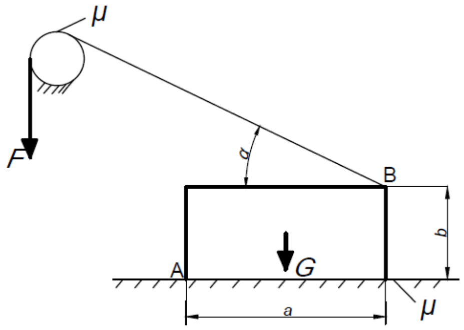
Zadatak 7.4

Sanduk težine *G* se nalazi na hrapavoj podlozi. U točki B sanduka je vezano uže koje je prebačeno preko nepomične koloture, a na kraju užeta djeluje sila *F*.

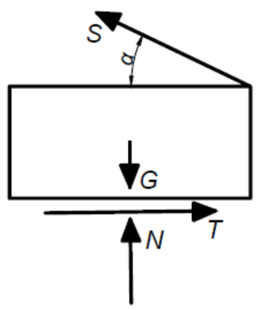
Potrebno je odrediti veličinu sile *F* da bi se sanduk jednoliko gibao po hrapavoj podlozi.

Treba provjeriti podiže li izračunata sila *F* sanduk od podloge.

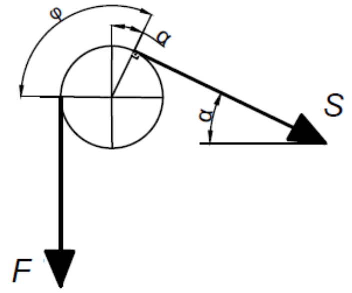
Zadano: $G = 1000$ N, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}35$, $a = 1{,}5$ m, $b = 1$ m



Slika 7.4a: *Sanduk na hrapavoj podlozi*



Slika 7.4b: *Sanduk oslobođen od veza*



Slika 7.4c: *Sile na koloturi i prikaz obuhvatnog kuta*

Prema slici 7.4b, za ravnotežu sanduka vrijede sljedeće jednadžbe ravnoteže, te Coulombov zakon trenja klizanja:

$\sum F_x = 0 \rightarrow T - S\cos\alpha = 0,$ (7.4.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - G + S\ \sin\alpha,$ (7.4.2)

$T = \mu\, N.$ (7.4.3)

Kombinacijom tih triju jednadžbi dobivamo izraz i rezultat za silu u užetu.

$$S = \frac{\mu\, G}{\mu\ \sin\alpha + \cos\alpha} = 336{,}2 \text{ N.}$$

Za zadano gibanje sanduka po podlozi , na koloturi vrijedi da je $F > S$.

Prema slici 7.4c, obuhvatni kut je:

$\varphi = 90^{\circ} + 30^{\circ} = 120^{\circ} = 2{,}09$ rad.

Slijedi sila F potrebna za gibanje sanduka.

$$F = S \cdot e^{\mu \cdot \varphi} = 336{,}2 \cdot e^{0{,}35 \cdot 2{,}09} = 698{,}7 \text{ N.}$$

Da sila *F* ne bi podizala sanduk od podloge, moment težine *G* oko točke A mora biti veći od momenta sile *S* u užetu oko te iste točke. Također, u graničnom slučaju kada dolazi do podizanja, normalna reakcija podloge *N* će biti jednaka nuli.

Navedeni momenti su izračunati kako slijedi:

$$M_A^G = G\ \frac{a}{2} = 750 \text{ Nm,}$$

$$M_A^S = S\ \cos\alpha \cdot b + S\ \sin\alpha \cdot a = 543 \text{ Nm,}$$

$$M_A^G > M_A^S.$$

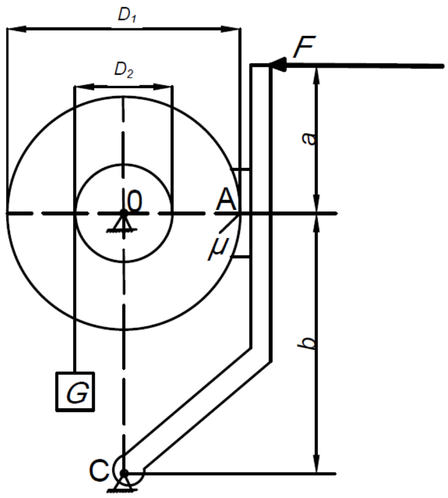
Zaključak: Sila *F* ne podiže sanduk od podloge.

8. KOČNICE

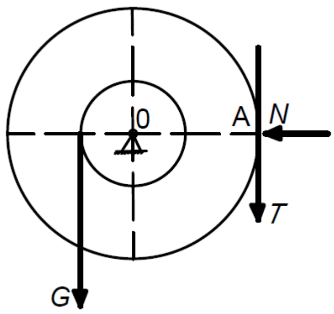
Zadatak 8.1

Potrebno je odrediti silu F kojom treba djelovati na polugu kočnice za održavanje predmeta težine G u stanju mirovanja. Kočnica je prikazana na slici 8.1a.

Zadano: G = 1000 N, μ = 0,5, D_1 = 0,8m, D_2 = 0,4 m, a = 0,5 m, b = 0,8 m.



Slika 8.1a: *Kočnica*



Slika 8.1b: *Kočioni bubanj oslobođen od veza*

Prema slici 8.1b, za ravnotežu kočionog bubnja vrijedi sljedeća jednadžba ravnoteže:

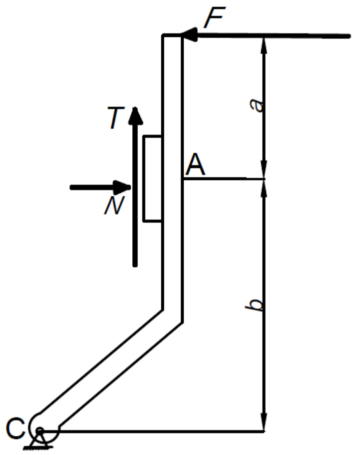
$$\sum M_0 = 0 \rightarrow G\,\frac{D_2}{2} - T\,\frac{D_1}{2} = 0. \qquad (8.1.1)$$

Iz nje možemo izračunati silu trenja u točki A gdje poluga dodiruje bubanj.

$$T = G\,\frac{D_2}{D_1} = 500 \text{ N}.$$

Iz Coulombovog zakona izračunavamo i normalnu reakciju.

$$N = \frac{T}{\mu} = 1000 \text{ N}. \qquad (8.1.2)$$



Slika 8.1c: *Kočiona poluga oslobođena od veza*

Iz jednadžbe ravnoteže za polugu (slika 8.1c), dobivamo traženu silu F.

$\sum M_C = 0 \rightarrow F\,(a+b) - T\,\frac{D_1}{2} - N \cdot b = 0,$ (8.1.3)

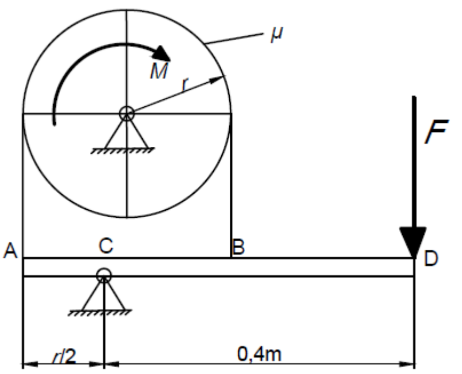
$$F = \frac{N \cdot b - T\,\frac{D_1}{2}}{a+b} = 461{,}5 \text{ N.}$$

Zadatak 8.2

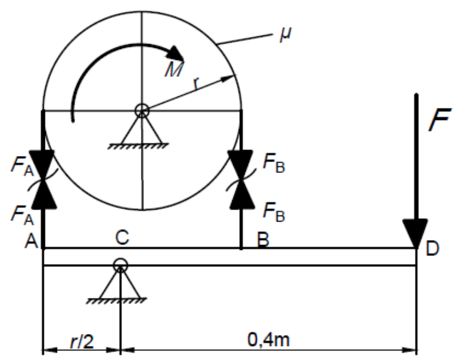
Na kočioni bubanj, prema slici 8.2a, djeluje moment M u smjeru strelice. Ako silom F na kraju poluge želimo zaustaviti bubanj, koliki mora biti njezin iznos?

Kolike su tada sile u kočionim trakama?

Zadano: $M = 600$ Nm, $r = 0{,}15$ m, $\mu = 0{,}2$.



Slika 8.2a: *Kočnica*



Slika 8.2b: *Dijelovi sustava oslobođeni od veza*

Sile u kočionim trakama ćemo izračunati iz jednadžbe ravnoteže za kočioni bubanj koristeći prikaz sa slike 8.2b.

$\sum M_O = 0 \rightarrow F_A \cdot r - M - F_B \cdot r = 0.$ (8.2.1)

Kao dopunsku jednadžbu koristimo Eulerovu jednadžbu užetnog trenja.
Za odnos sila u kočionim trakama F_A i F_B vrijedi da je $F_A > F_B$, pa je

$F_A = F_B \cdot e^{\mu \cdot \varphi}.$ (8.2.2)

Obuhvatni kut $\varphi = 180^o = \pi$ rad.

Supstitucijom (8.2.2) u (8.2.1) dobivamo:

$$F_B \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot r - M - F_B \cdot r = 0,$$

$$F_B = \frac{M}{r\,(e^{\mu \cdot \varphi} - 1)} = 4574{,}3 \text{ N.}$$

Iz jednadžbe (8.2.2) izračunavamo silu F_A.

$$F_A = 4574 \cdot e^{0{,}2 \cdot \pi} = 8574{,}3 \text{ N.}$$

Silu F ćemo izračunati iz jednadžbe ravnoteže za polugu AD, prema slici 8.2b.

$\sum M_C = 0 \rightarrow F_A \frac{r}{2} - F_B \left(r + \frac{r}{2}\right) + \mathrm{F} \cdot 0{,}4 = 0,$ (8.2.3)

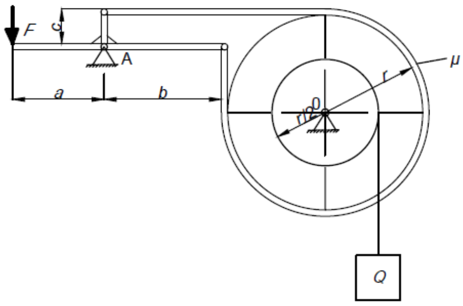
$$F = \frac{F_B \left(r + \frac{r}{2}\right) - F_A \frac{r}{2}}{0{,}4} = 965{,}4 \text{ N.}$$

Zadatak 8.3

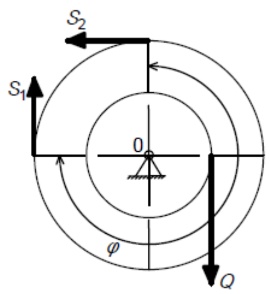
Kočnicom prema slici 8.3a se osigurava jednoliko spuštanje tereta težine Q.

Treba odrediti potrebnu veličinu sile F da bi se ostvarilo zadano gibanje.

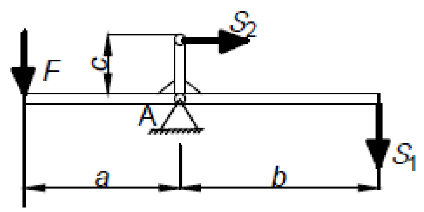
Zadano: Q = 700 N, μ = 0,3, a = 120 cm, b = 50 cm, c = 25 cm.



Slika 8.3a: *Kočnica*



Slika 8.3b: *Kočioni bubanj oslobođen od veza*



Slika 8.3c: *Kočiona poluga oslobođena od veza*

Za bubanj, prikazan na slici 8.3b, vrijedi

$\sum M_0 = 0 \rightarrow Q \cdot \frac{r}{2} + S_1 \cdot r - S_2 \cdot r = 0.$ (8.3.1)

Slijedi Eulerova jednadžba užetnog trenja, uz $S_2 > S_1$.

$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu \cdot \varphi}.$ (8.3.2)

Kombinacijom (8.3.1) i (8.3.2) dobivamo

$$S_1 = \frac{0{,}5\ G}{e^{\mu \cdot \varphi} - 1} = 112{,}5\ \text{N}\,,$$

S_2 = 462,6 N.

Tražena sila F proizlazi iz ravnoteže poluge prikazane na slici 8.3c.

$\sum M_0 = 0 \rightarrow F \cdot a - S_1 \cdot b - S_2 \cdot c = 0,$ (8.3.3)

$$F = \frac{S_1 \cdot b + S_2 \cdot c}{a} = 143{,}3\ \text{N}.$$

9. *TRENJE KOTRLJANJA*

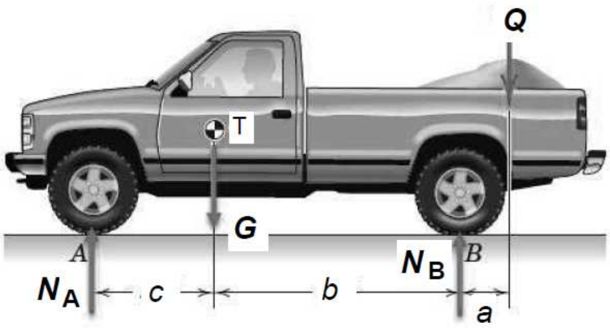
Zadatak 9.1

Kamion težine G koja djeluje u težištu, prikazanom na slici 9.1a, vozi na kraju karoserije teret težine Q.

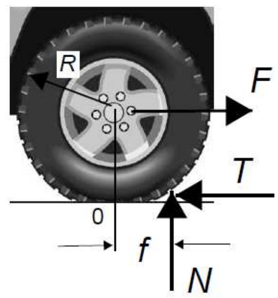
Potrebno je odrediti:

a) pritiske N_A i N_B , tj. raspodjelu težina G i Q , na prednje i stražnje kotače kamiona
b) potrebnu vučnu silu F da bi se kamion kretao jednoliko ako djeluje samo trenje kotrljanja.

Zadano: G = 45000 N, Q = 35000 N, a = 1 m, b = 2 m, c = 1,2 m, R = 0,4 m (radijus kotača)
f_A = 0,01m (krak trenja kotrljanja za prednje kotače)
f_B = 0,008 m (krak trenja kotrljanja za stražnje kotače).



Slika 9.1a: *Kamion s teretom Q*



Slika 9.1b: *Izračunavanje vučne sile F*

Položaji tereta Q, vlastite težine G, te sila N_A i N_B su prikazani na slici 9.1a.

Za izračunavanje N_A i N_B postavljamo sljedeće uvjete ravnoteže:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow N_A\,(b + c) - G \cdot b + Q \cdot a = 0, \qquad (9.1.1)$$

$$N_A = \frac{G \cdot b - Q \cdot a}{b + c} = 17\ 188 \text{ N}.$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow -Q + N_A - G + N_B = 0, \qquad (9.1.2)$$

$$N_B = G + Q - N_A = 62\ 812 \text{ N}.$$

Vučnu silu F ćemo prikazati u općenitom izrazu postavljajući jednadžbu ravnoteže prema slici 9.1b.

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow F \cdot R - N \cdot f = 0, \qquad (9.1.3)$$

$$F = N\,\frac{f}{R}.$$

Uvrstimo li u taj izraz zadane vrijednosti za f_A i f_B , te izračunate vrijednosti za N_A i N_B , dobivamo potrebne vučne sile na prednjim i stražnjim kotačima.

$$F_A = N_A \frac{f_A}{R} = 429{,}7 \text{ N},$$

$$F_B = N_B \frac{f_B}{R} = 1256{,}2 \text{ N}.$$

Zbrajanjem tih dviju sila dobivamo ukupnu silu koja je potrebna da se svlada trenje kotrljanja.

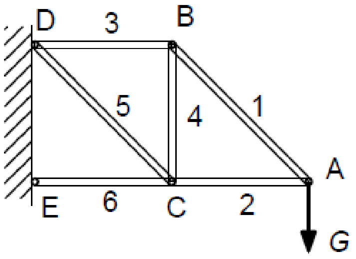
$$F = F_A + F_B = 1686 \text{ N}.$$

10. REŠETKASTI NOSAČI

Zadatak 10.1

Za rešetkasti nosač prema slici 10.1a, opterećen silom G, potrebno je izračunati sile u svim štapovima.

Zadano: $G = 10$ kN , $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CE} = 1$ m.



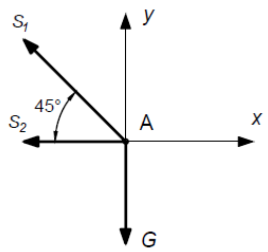
Slika 10.1a: *Rešetkasti nosač*

Za rješavanje ovog zadatka primijenit ćemo metodu čvorova tako da postavimo uvjete ravnoteže za svaki čvor zasebno. Budući da na svaki čvor djeluje konkurentni sustav sila u ravnini, možemo za svaki čvor napisati dva uvjeta ravnoteže.

Počinjemo s čvorom A gdje djeluje poznata sila G i dvije nepoznate sile. Sile u štapovima 1 i 2 ćemo pretpostaviti sa smjerom od čvorova kako bi dobili sile na štapove. Ovo vrijedi i za sve ostale čvorove.

Rješenja dobivamo kombinacijom postavljenih jednadžbi ravnoteže.

- Čvor A



Slika 10.1b: *Sustav sila u čvoru A*

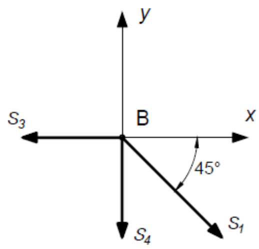
$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_1 \cos 45^\circ - S_2 = 0,$ (10.1.1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_1 \sin 45^\circ - G = 0,.$ (10.1.2)

$$S_1 = \frac{G}{\sin 45°} = 14{,}14 \text{ kN},$$

$$S_2 = -\,S_1 \cos 45° = -10 \text{ kN}.$$

- Čvor B



Slika 10.1c: *Sustav sila u čvoru B*

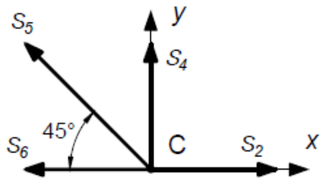
$\sum F_x = 0 \rightarrow S_1 \cos 45^\circ - S_3 = 0,$ (10.1.3)

$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_1 \sin 45^\circ - S_4 = 0.$ (10.1.4)

$S_3 = S_1 \cos 45° = 10$ kN,

$S_4 = -S_1 \sin 45° = -10$ kN.

- Čvor C



Slika 10.1d: *Sustav sila u čvoru C*

$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_5 \cos 45^\circ - S_6 + S_2 = 0,$ (10.1.5)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_5 \sin 45^\circ + S_4 = 0.$ (10.1.6)

$$S_5 = -\frac{S_4}{\sin 45°} = -\frac{-10}{\sin 45°} = 14{,}14 \text{ kN},$$

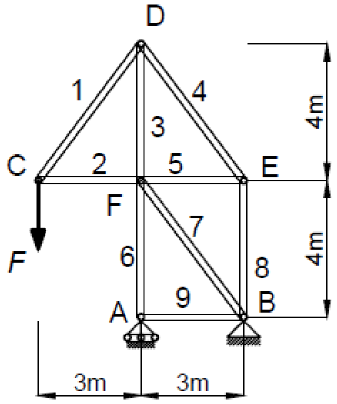
$$S_6 = S_2 - S_5 \cos 45° = -10 - 14{,}14 \cdot \cos 45° = -20 \text{ kN}.$$

Zadatak 10.2

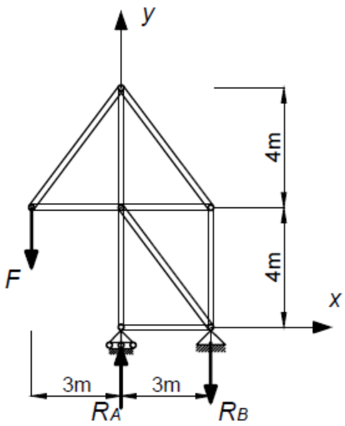
Za rešetkasti nosač prema slici 10.2a, opterećen silom F, potrebno je izračunati:

a) reakcije u osloncima A i B
b) sile u svim štapovima .

Zadano: $F = 50$ kN.



Slika 10.2a: *Rešetkasti nosač*



Slika 10.2b: *Rešetkasti nosač oslobođen od veza*

Kod određivanja reakcija u osloncima, cijeli se rešetkasti nosač promatra kao kruta figura. Pretpostavljeni smjerovi reakcija u osloncima A i B su prikazani na slici 10.2b.

Za takav sustav sila u ravnini vrijede sljedeće jednadžbe ravnoteže iz kojih su izračunate nepoznate reakcije:

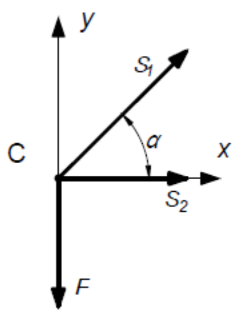
$$\sum M_B = 0 \rightarrow -F \cdot 6 + R_A \cdot 3 = 0 \rightarrow R_A = 2\,F = 100 \text{ kN}, \qquad (10.2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F + R_A - R_B = 0 \rightarrow R_B = -F + R_A = 50 \text{ kN}. \qquad (10.2.2)$$

Kao i u zadatku 10.1, za izračunavanje sila u štapovima ćemo primijeniti metodu čvorova.

Postavljamo uvjete ravnoteže za svaki čvor zasebno počevši od čvora na koji djeluje barem jedna poznata sila i najviše dvije nepoznate sile u štapovima. Počinjemo s čvorom C.

- Čvor C



Slika 10.2c: *Sustav sila u čvoru C*

$\sum F_x = 0 \rightarrow S_1 \cos\alpha + S_2 = 0,$ (10.2.3)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_1 \sin\alpha - F = 0.$ (10.2.4)

Nepoznati kut α ćemo izračunati iz zadanih dimenzija sa slike 10.2a.

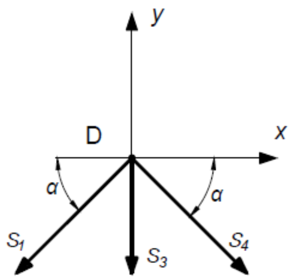
$$\tan\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33 \ \rightarrow \alpha = 53{,}13°.$$

Iz jednadžbi (10.2.3) i (10.2.4) izračunavamo sile u štapovima 1 i 2.

$$S_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = 62{,}5 \ \text{kN},$$

$$S_2 = -S_1 \cos\alpha = -37{,}5 \ \text{kN}.$$

- Čvor D



Slika 10.2d: *Sustav sila u čvoru D*

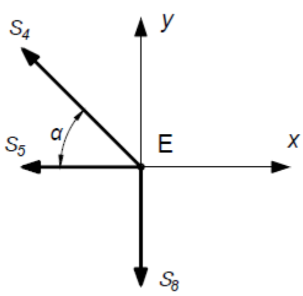
$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_1 \cos\alpha + S_4 \cos\alpha = 0,$ (10.2.5)

$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_1 \sin\alpha - S_4 \sin\alpha - S_3 = 0.$ (10.2.6)

$$S_4 = S_1 = 62{,}5 \ \text{kN},$$

$$S_3 = -2\,S_1 \sin\alpha = -100 \ \text{kN}.$$

- Čvor E



Slika 10.2e: *Sustav sila u čvoru E*

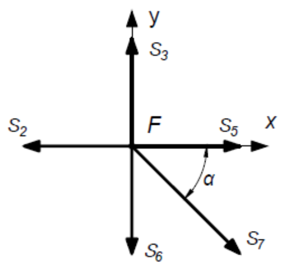
$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_5 - S_4 \cos\alpha = 0,$ (10.2.7)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_8 - S_4 \sin\alpha = 0.$ (10.2.8)

$S_5 = -S_4 \cos\alpha = -37{,}5$ kN,

$S_8 = S_4 \sin\alpha = 50$ kN.

- Čvor F



Slika 10.2f: *Sustav sila u čvoru F*

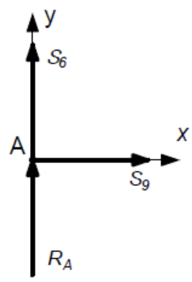
$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_2 + S_5 + S_7 \cos\alpha = 0,$ (10.2.9)

$\sum F_y = 0 \rightarrow S_3 - S_6 - S_7 \sin\alpha = 0.$ (10.2.10)

$S_7 = \dfrac{S_2 - S_5}{\cos\alpha} = \dfrac{-37{,}5 - (-37{,}5)}{\cos\alpha} = 0$ kN,

$S_6 = S_3 = -100$ kN.

- Čvor A



Slika 10.2g: *Sustav sila u čvoru A*

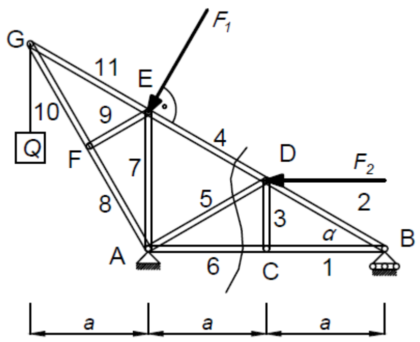
$\sum F_x = 0 \rightarrow S_9 = 0.$ (10.2.11)

Zadatak 10.3

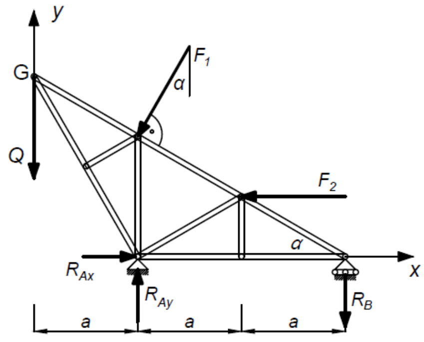
Za rešetkasti nosač prema slici 10.3a , opterećen zadanim silama, potrebno je izračunati:

a) reakcije u osloncima A i B
b) sile u štapovima 4, 5 i 6.

Zadano: $Q = F_1 = F_2 = 2000$ N , $a = 2$ m , $\alpha = 30^o$.



Slika 10.3a: *Rešetkasti nosač*



Slika 10.3b: *Rešetkasti nosač oslobođen od veza*

Na slici 10.3b su prikazani pretpostavljeni smjerovi reakcija u osloncima A i B.

Da bismo izračunali vrijednosti reakcija, rešetkasti nosač promatramo kao krutu figuru te postavljamo tri jednadžbe ravnoteže iz kojih izračunavamo nepoznanice.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} - F_2 - F_1 \sin\alpha = 0, \qquad (10.3.1)$$

$$R_{Ax} = F_2 + F_1 \sin\alpha = 3000 \text{ N}.$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow Q \cdot 3a - R_{Ay} \cdot 2a + F_1 \cdot \frac{2a}{\cos\alpha} + F_2 \cdot a \cdot \tan\alpha = 0, \qquad (10.3.2)$$

$$R_{Ay} = \frac{3Q + F_2 \tan\alpha + \frac{2F_1}{\cos\alpha}}{2} = 5886{,}8 \text{ N}.$$

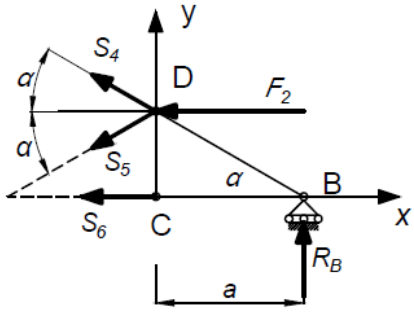
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -Q + R_{Ay} - R_B - F_1 \cos\alpha = 0, \qquad (10.3.3)$$

$$R_B = R_{Ay} - F_1 \cos\alpha - Q = 2154{,}7 \text{ N}.$$

U zadatku je potrebno izračunati samo sile u štapovima 4, 5 i 6.

U tom slučaju možemo koristiti metodu presjeka tako da napravimo zamišljeni presjek rešetke preko tri štapa za koje tražimo sile. Time je rešetka rastavljena na dva dijela, pa možemo promatrati ravnotežu dijela rešetke ili s lijeve ili s desne strane presjeka.

Kao što je prikazano na slici 10.3c, promatrat ćemo ravnotežu desnog dijela rešetke, a utjecaj jednog dijela rešetke u odnosu na drugi ćemo zamijeniti ucrtavanjem sila u štapovima 4, 5 i 6.



Slika 10.3c: *Dio rešetke desno od presjeka*

Tako odsječeni dio promatramo kao krutu figuru te postavljamo tri jednadžbe ravnoteže iz kojih slijede rješenja:

$$\sum M_{\mathrm{D}} = 0 \rightarrow R_{\mathrm{B}} \cdot a - S_6 \cdot a \cdot \tan\alpha = 0, \qquad (10.3.4)$$

$$S_6 = \frac{R_{\mathrm{B}}}{\tan\alpha} = 3732 \ \mathrm{N}.$$

$$\sum M_{\mathrm{B}} = 0 \rightarrow F_2 \cdot a \cdot \tan\alpha + S_5 \cos\alpha \cdot a \cdot \tan\alpha + S_5 \sin\alpha \cdot a = 0, \qquad (10.3.5)$$

$$S_5 = -\frac{F_2 \tan\alpha}{\cos\alpha \cdot \tan\alpha + \sin\alpha} = -1154{,}7 \ \mathrm{N}.$$

$$\sum F_{\mathrm{y}} = 0 \rightarrow R_{\mathrm{B}} + S_4 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha = 0, \qquad (10.3.6)$$

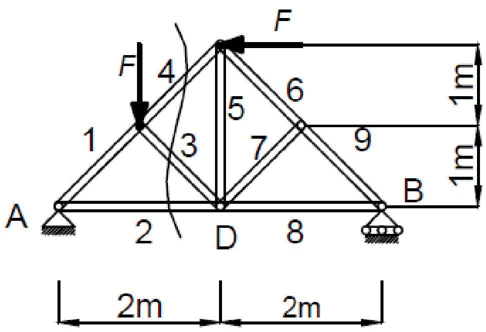
$$S_4 = S_5 - \frac{R_{\mathrm{B}}}{\sin\alpha} = -1154{,}7 - 4309{,}4 = -5464{,}1 \ \mathrm{N}.$$

Zadatak 10.4

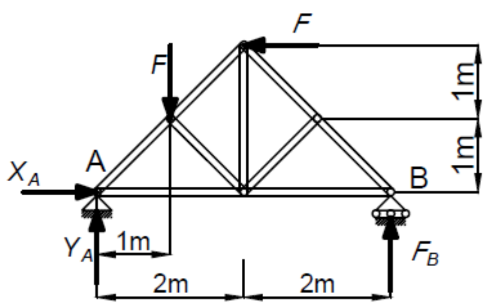
Za rešetkasti nosač prema slici 10.4a, opterećen zadanim silama, potrebno je izračunati:

a) reakcije u osloncima A i B
b) sile u štapovima 2, 3, 4, 8 i 9.

Zadano: F = 10000 N.



Slika 10.4a: *Rešetkasti nosač*



Slika 10.4b: *Rešetkasti nosač oslobođen od veza*

Reakcije u osloncima su prikazane na slici 10.4b. Kao i u prethodnim zadacima, izračunat ćemo ih tako da rešetkasti nosač promatramo kao krutu figuru, te postavljamo sljedeće jednadžbe ravnoteže iz kojih slijede tražena rješenja.

$\sum M_A = 0 \rightarrow -F \cdot 1 + F \cdot 2 + F_B \cdot 4 = 0,$ (10.4.1)

$F_B = \dfrac{F - 2F}{4} = -2500 \text{ N}.$

$\sum F_x = 0 \rightarrow X_A - F = 0,$ (10.4.2)

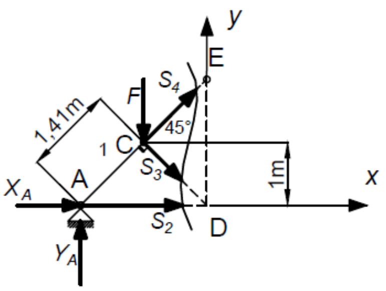
$X_A = F = 10000 \text{ N}.$

$\sum F_y = 0 \rightarrow Y_A - F + F_B = 0,$ (10.4.3)

$Y_A = F - F_B = 10000 - (-2500) = 12500 \text{ N}.$

Sile u štapovima ćemo izračunati primjenom dviju različitih metoda.

Za sile u štapovima 2, 3 i 4 ćemo primijeniti metodu presjeka. Napravimo li zamišljeni presjek rešetke preko ta tri štapa rastavit ćemo rešetku na dva dijela, kao što je prikazano na slici 10.4c, i promatrat ćemo ravnotežu lijevog dijela rešetke.



Slika 10.4c: *Dio rešetke lijevo od presjeka*

Postavljamo jednadžbe ravnoteže za lijevi dio rešetke i iz njih izračunavamo nepoznate sile u štapovima 2, 3 i 4.

$\sum M_C = 0 \rightarrow -X_A \cdot 1 - S_2 \cdot 1 + Y_A \cdot 1 = 0,$ (10.4.4)

$S_2 = Y_A - X_A = 2500 \text{ N}.$

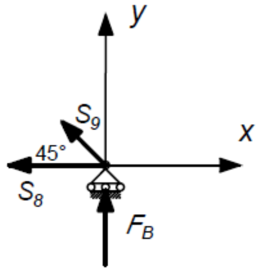
$\sum M_A = 0 \rightarrow -F \cdot 1 - S_3 \cdot 1{,}41 = 0,$ (10.4.5)

$S_3 = -\dfrac{F}{1{,}41} = -7071 \text{ N}.$

$\sum F_y = 0 \rightarrow Y_A - F + S_4 \sin 45° - S_3 \sin 45° = 0,$ (10.4.6)

$S_4 = \dfrac{S_3 \sin 45° + F - Y_A}{\sin 45°} = -10606 \text{ N}.$

Za izračunavanje sila u štapovima 8 i 9 primijenit ćemo metodu čvorova, tj. promatrat ćemo ravnotežu čvora B kako je prikazano na slici 10.4d.



Slika 10.4d: *Sustav sila u čvoru B*

Jednadžbe ravnoteže iz kojih slijede rješenja su:

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_B + S_9 \sin 45° = 0,$ (10.4.7)

$S_9 = -\dfrac{F_B}{\sin 45°} = -\dfrac{-2500}{\sin 45°} = 3535 \text{ N}.$

$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_8 - S_9 \cos 45° = 0,$ (10.4.8)

$S_8 = -S_9 \cos 45° = -2500 \text{ N}.$

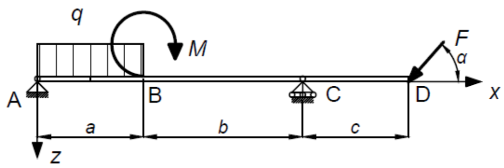
11. PUNI RAVNI NOSAČI

Zadatak 11.1

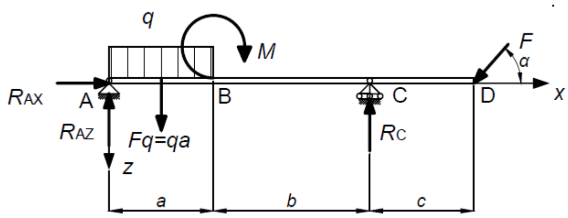
Za puni ravni nosač zadanih dimenzija i opterećenja prema slici 11.1a , potrebno je:

a) izračunati reakcije u osloncima A i C
b) izračunati vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja u karakterističnim točkama
c) skicirati i kotirati dijagrame raspodjele uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja (N, Q i M dijagrami).

Zadano: $F = 2000$ N , $M = 1000$ Nm , $q = 1500$ N/m , $a = c = 2$ m , $b = 3$ m , $\alpha = 30^o$.



Slika 11.1a: *Puni ravni nosač*



Slika 11.1b: *Nosač oslobođen od veza*

a) <u>Izračunavanje reakcija u osloncima A i C</u>

Pretpostavljeni smjerovi reakcija u osloncima su prikazani na slici 11.1b. Reakcije ćemo izračunati iz sljedećih jednadžbi ravnoteže:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} - F\ \cos\alpha = 0, \qquad (11.1.1)$$

$$R_{Ax} = F\ \cos\alpha = 1732 \text{ N.}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -q\ a \cdot \frac{a}{2} - M + R_C\,(a+b) - F\ \sin\alpha\,(a+b+c) = 0, \qquad (11.1.2)$$

$$R_C = \frac{q\ \frac{a^2}{2} + M + F\ \sin\alpha\,(a+b+c)}{a+b} = 2200 \text{ N.}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow q\ a + F\ \sin\alpha - R_{Az} - R_C = 0, \qquad (11.1.3)$$

$$R_{Az} = q\ a + F\ \sin\alpha - R_C = 1800 \text{ N.}$$

b) Izračunavanje vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja

Da bismo odredili zakonitosti promjene unutrašnjih sila i momenata te izračunali njihove vrijednosti u pojedinim točkama grede, gredu ćemo promatrati po područjima:

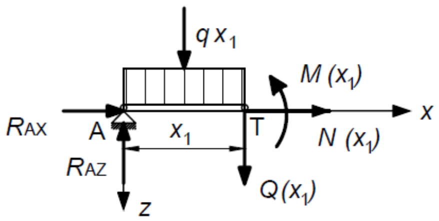
I. područje: između točaka A i B
II. područje: između točaka B i C
III. područje: između točaka C i D.

Između krajnjih točaka pojedinog područja postavljamo zamišljeni presjek na udaljenosti "x" od početne točke, ucrtavamo pozitivne smjerove unutrašnjih sila i momenata te definiramo jednadžbe ravnoteže.

Iz jednadžbi ravnoteže dobivamo zakonitosti promjene unutrašnjih sila i momenata. Uvrštavanjem zadanih vrijednosti vanjskog opterećenja, izračunatih vrijednosti reakcija u osloncima te rubnih uvjeta za početnu i krajnju točku, dobivamo rezultate za unutrašnje sile i momente.

Ako je potrebno, unutrašnje sile i momenti se mogu izračunati i za bilo koju točku unutar promatranog područja uvrštavanjem rubnih uvjeta, tj. uvrštavanjem "x" koordinate točke u zakonitost promjene unutrašnje veličine.

I. područje: između točaka A i B → $0 \leq x_1 \leq a$



Slika 11.1c: *I. područje*

Za dio nosača koji je prikazan na slici 11.1c, postavljamo jednadžbe ravnoteže iz kojih izračunavamo tražene vrijednosti za unutrašnje veličine.

- za uzdužne sile $N(x)$:

$\sum F_x = 0 \rightarrow N(x_1) + R_{Ax} = 0,$ (11.1.4)

$N(x_1) = -R_{Ax} = -1732$ N.

- za poprečne sile $Q(x)$:

$\sum F_z = 0 \rightarrow Q(x_1) - R_{Az} + q\, x_1 = 0,$ (11.1.5)

$Q(x_1) = R_{Az} - q\, x_1.$ (jednadžba pravca)

za x_1=0 (točka A)→ $Q(x_1) = Q_A = R_{Az} = 1800$ N,

za x_1=a (točka B)→ $Q(x_1) = Q_B = -1200$ N.

- za momente savijanja $M(x)$:

$$\sum M_T = 0 \rightarrow M(x_1) - R_{Az}\, x_1 + q\, x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0, \qquad (11.1.6)$$

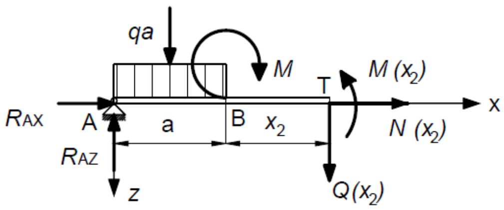
$$M(x_1) = R_{Az}\, x_1 - q\, \frac{{x_1}^2}{2}. \qquad \text{(jednadžba parabole)}$$

za x_1=0 (točka A)→ $M(x_1) = M_A = 0$ N,

za $x_1=a$ (točka B)→ $M(x_1) = M_B^L = 600$ N.

U točki B djeluje vanjski moment M pa ćemo vrijednosti unutrašnjeg momenta $M(x)$ u točki B izračunati malo lijevo (M_B^L) i malo desno od točke B (M_B^D). Razlika između te dvije vrijednosti je upravo zadani vanjski moment M.

II. područje: između točaka B i C → 0 ≤ x_2 ≤ b



Slika 11.1d: *II. područje*

Nastavljamo s područjem II. za koje vrijede sljedeće jednadžbe ravnoteže:

- za uzdužne sile $N(x)$:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N(x_2) + R_{Ax} = 0, \qquad (11.1.7)$$

$$N(x_2) = -R_{Ax} = -1732 \text{ N}.$$

- za poprečne sile $Q(x)$:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow Q(x_2) - R_{Az} + q\, a = 0, \qquad (11.1.8)$$

$$Q(x_2) = R_{Az} - q\, a = -1200 \text{ N}.$$

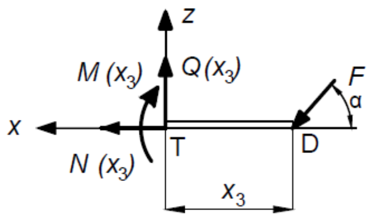
- za momente savijanja $M(x)$:

$$\sum M_T = 0 \rightarrow M(x_2) - R_{Az}\,(a + x_2) + q\, a\left(\frac{a}{2} + x_2\right) - M = 0, \qquad (11.1.9)$$

$$M(x_2) = R_{Az}\,(a + x_2) + M - q\, a\left(\frac{a}{2} + x_2\right). \qquad \text{(jednadžba pravca)}$$

za x_2=0 (točka B)→ $M(x_2) = M_B^D = 1600$ N,
za $x_2=b$ (točka C)→ $M(x_2) = M_C = -2000$ N.

III. područje: između točaka C i D → $0 \leq x_3 \leq c$



Slika 11.1e: *III. područje*

Kao što se vidi na slici 11.1e, zamišljeni presjek je napravljen između točaka C i D, ali ćemo promatrati dio nosača desno od presjeka poštujući pravila o pozitivnim smjerovima unutrašnjih veličina. Na taj ćemo način dobiti jednostavnije jednadžbe ravnoteže, a time i jednostavnije izraze za izračunavanje unutrašnjih veličina, i to:

- za uzdužne sile $N(x)$:

$\sum F_x = 0 \rightarrow N(x_3) + F\cos\alpha = 0,$ (11.1.10)

$N(x_2) = -F\ \cos\alpha = -1732$ N.

- za poprečne sile $Q(x)$:

$\sum F_z = 0 \rightarrow Q(x_3) - F\ \sin\alpha = 0,$ (11.1.11)

$Q(x_3) = F\ \sin\alpha = 1000$ N.

- za momente savijanja $M(x)$:

$\sum M_T = 0 \rightarrow M(x_3) + F\ \sin\alpha \cdot x_3 = 0,$ (11.1.12)

$M(x_3) = -F\ \sin\alpha \cdot x_3\,.$ (jednadžba pravca)

za x_3=0 (točka D)→ $M(x_3) = M_D = 0$ N,
za x_2=c (točka C)→ $M(x_3) = M_C = -2000$ N.

c) Skiciranje i kotiranje dijagrama raspodjele uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja (*N*, *Q* i *M* dijagrami)

Nakon što smo izračunali vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja u pojedinim točkama grede, slijedi skiciranje *N*, *Q* i *M* dijagrama.

Da bi dijagrami bili ispravno nacrtani, moramo odabrati mjerilo u kojima će biti prikazane dimenzije grede i vrijednosti unutrašnjih veličina.

Odabrana mjerila su sljedeća:

- za dimenzije (a, b, c): 1 cm $\widehat{=}$ 1 m
- za uzdužne sile $N(x)$: 1 cm $\widehat{=}$ 1732 N
- za poprečne sile $Q(x)$: 1cm $\widehat{=}$ 600 N
- za momente savijanja $M(x)$: 1 cm $\widehat{=}$ 600 Nm.

S crtanjem dijagrama krećemo slijeva udesno, tj. od točke A prema točki D tako da u pojedinim točkama nosača u mjerilu unosimo vrijednosti za *N*, *Q* i *M* koje smo izračunali u b) dijelu ovog zadatka.

Pozitivne vrijednosti unosimo na dijagram iznad tzv."nulte linije", a negativne ispod. Istovremeno kotiramo dijagrame upisivanjem brojčanih iznosa. Nakon toga, unesene vrijednosti spajamo linijama prema zakonitostima promjene unutrašnjih veličina za pojedino područje (konstantna vrijednost za određeno područje, pravac, parabolu).

Također, u *N* i *Q* dijagramima označavamo smjer i naziv uzdužnih i poprečnih sila u pojedinim točkama.

Dijagrami su prikazani na slici 11.1h.

Kao što je vidljivo iz *Q* dijagrama za I. područje (između točaka A i B), poprečna sila *Q* je jednaka nuli na određenoj udaljenosti *x* od točke A. Za to je područje zakonitost promjene vrijednosti momenata savijanja definirana jednadžbom parabole. To znači da će parabola imati svoj maksimum upravo na mjestu gdje je poprečna sila jednaka nuli.

Dakle, da bi *M* dijagram bio ispravno nacrtan potrebno je izračunati udaljenost "*x*" od točke A na kojoj je Q=0. Tu udaljenost *x* ćemo označiti kao $x_{\max}$ jer će na tom mjestu *M* dijagram za I. područje imati svoj maksimum, tj. *M* će biti jednako $M_{\max}$.

Udaljenost $x_{\max}$ možemo izračunati na dva načina.

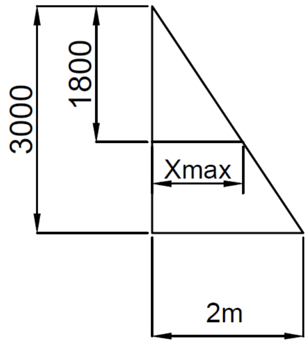
Prvi je način je da koristimo zakonitost promjene poprečne sile u I. području (izraz 11.1.5), uz uvjet $Q = 0$.

$$Q(x_1) = R_{\mathrm{Az}} - q\,x_1 = 0$$

Iz tog izraza dobivamo rezultat za $x_{\max}$.

$$x_1 = x_{\max} = \frac{R_{\mathrm{Az}}}{q} = \frac{1800}{1500} = 1{,}2 \text{ m}$$

Drugi je način preko sličnosti trokuta . Na slici 11.1f su prikazana dva trokuta koja su pojednostavljeni prikaz Q dijagrama za I. područje.

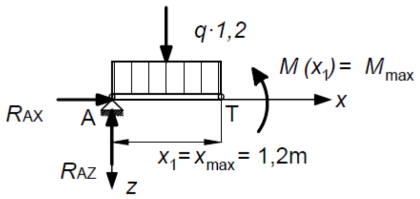


Slika 11.1f: *Izračunavanje udaljenosti* $x_{\max}$

Iz odnosa stranica za veći i manji trokut dobivamo $\frac{x_{\max}}{1800} = \frac{2}{3000}$,

a time i iznos za $x_{\max}$: $x_{\max} = \frac{3600}{3000} = 1{,}2$ m.

Moment na tom mjestu ćemo izračunati tako da napravimo zamišljeni presjek između točaka A i B upravo na udaljenosti $x_{\max}$ od točke A.

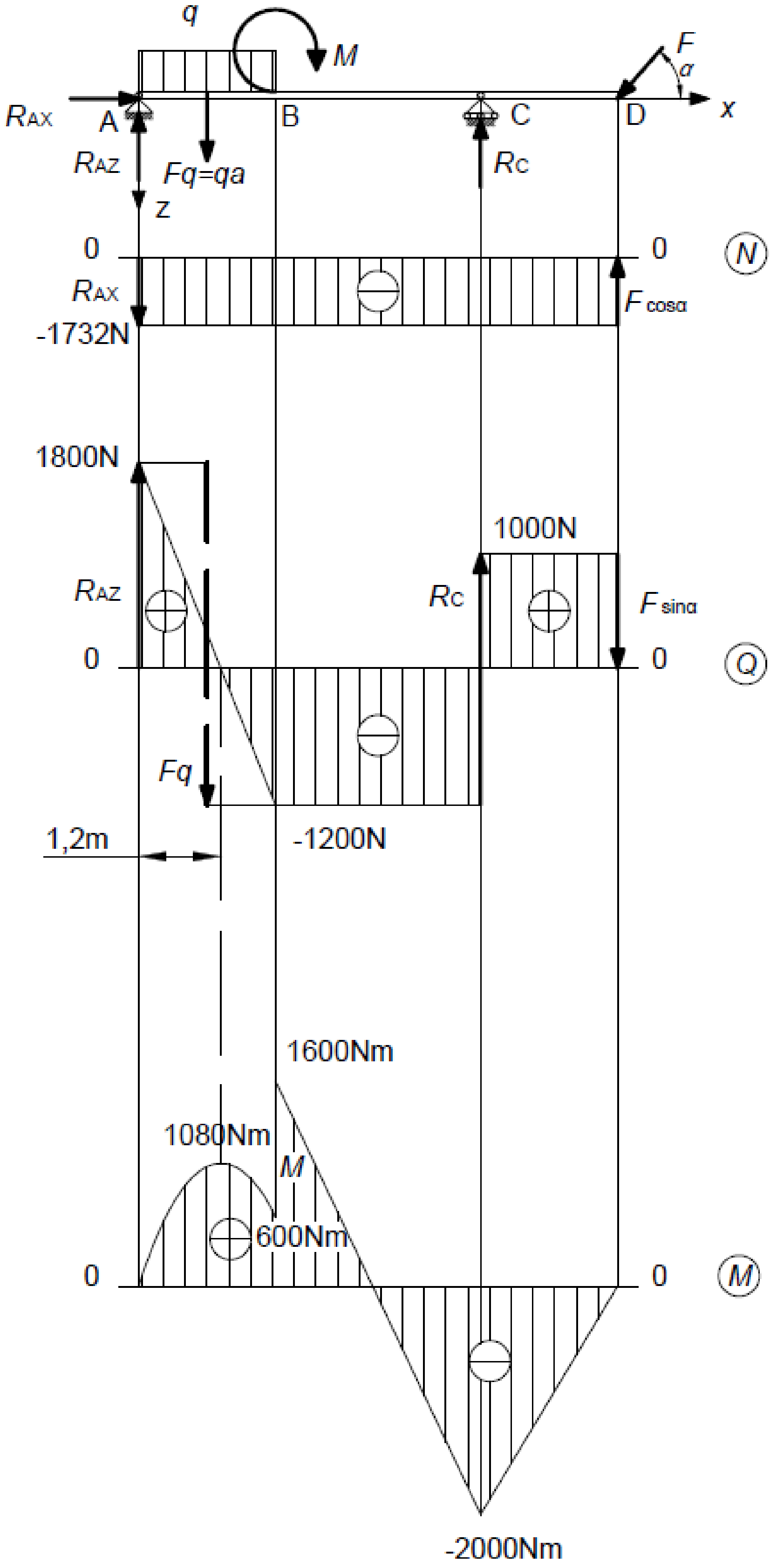


Slika 11.1g: *Presjek na udaljenosti* $x_{\max}$

Za dio nosača prikazan slikom 11.1g ćemo postaviti odgovarajuću jednadžbu ravnoteže za izračunavanje maksimalnog momenta savijanja.

$$\sum M_T = 0 \rightarrow M_{\max} - R_{Az} \cdot 1{,}2 + q \cdot 1{,}2 \cdot \frac{1{,}2}{2} = 0\,, \qquad (11.1.13)$$

$$M_{\max} = R_{Az} \cdot 1{,}2 - q\,\frac{1{,}2^2}{2} = 1080 \text{ Nm.}$$



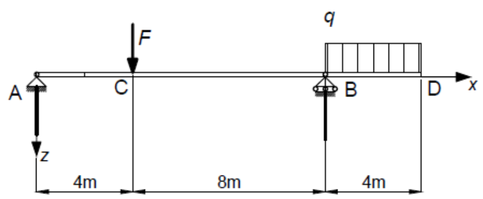
Slika 11.1h: *N, Q i M dijagrami uz zadatak 11.1*

Zadatak 11.2

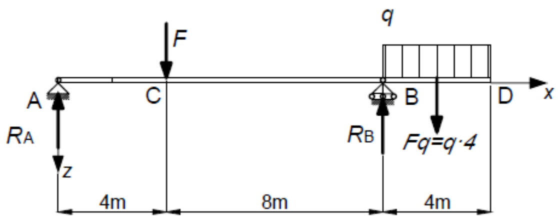
Za puni ravni nosač zadanih dimenzija prema slici 11.2a , koji je opterećen koncentriranom silom i kontinuiranim opterećenjem, potrebno je:

a) izračunati reakcije u osloncima A i B
b) izračunati vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u karakterističnim točkama
c) skicirati i kotirati dijagrame raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja (*Q* i *M* dijagrami).

Zadano: $F = 450$ N , $q = 150$ N/m.



Slika 11.2a: *Puni ravni nosač*



Slika 11.2b: *Nosač oslobođen od veza*

a) Izračunavanje reakcija u osloncima A i B

Za izračunavanje reakcija koje su prikazane na slici 11.2b vrijede sljedeće jednadžbe ravnoteže iz kojih dobivamo tražene vrijednosti:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0, \qquad (11.2.1)$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow R_A \cdot 12 - F \cdot 8 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \qquad (11.2.2)$$

$$R_A = \frac{F \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 2}{12} = 200 \text{ N}.$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow R_A - F + R_B - q \cdot 4 = 0, \qquad (11.2.3)$$

$$R_B = q \cdot 4 + F - R_A = 850 \text{ N}.$$

b) Izračunavanje vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja

U zadatku 11.1 je postupak izračunavanja unutrašnjih veličina vrlo detaljno obrađen i objašnjen. U ovom ćemo zadatku taj postupak pojednostaviti, tj. skratiti.

Za jednostavnije gredne nosače nije uvijek neophodno definirati zakonitosti promjene unutrašnjih veličina te iz njih izračunavati vrijednosti u pojedinim točkama nosača.

Momente savijanja izračunavamo na uobičajeni način postavljajući jednadžbe ravnoteže za određeno područje nosača, ali zamišljeni presjek postavljamo u rubnim točkama područja , čime dobivamo vrijednosti momenata savijanja upravo u tim točkama.

U ovom je zadatku dovoljno izračunati momente savijanja samo u točkama C i B. U točkama A i D nema vanjskih aktivnih momenata pa su unutrašnji momenti jednaki nuli. Rezultati su dobiveni iz sljedećih jednadžbi ravnoteže:

$\sum M_\mathrm{C} = 0 \rightarrow M_\mathrm{C} - R_\mathrm{A} \cdot 4 = 0 \ \rightarrow M_\mathrm{C} = R_\mathrm{A} \cdot 4 = 800$ Nm. (11.2.4)

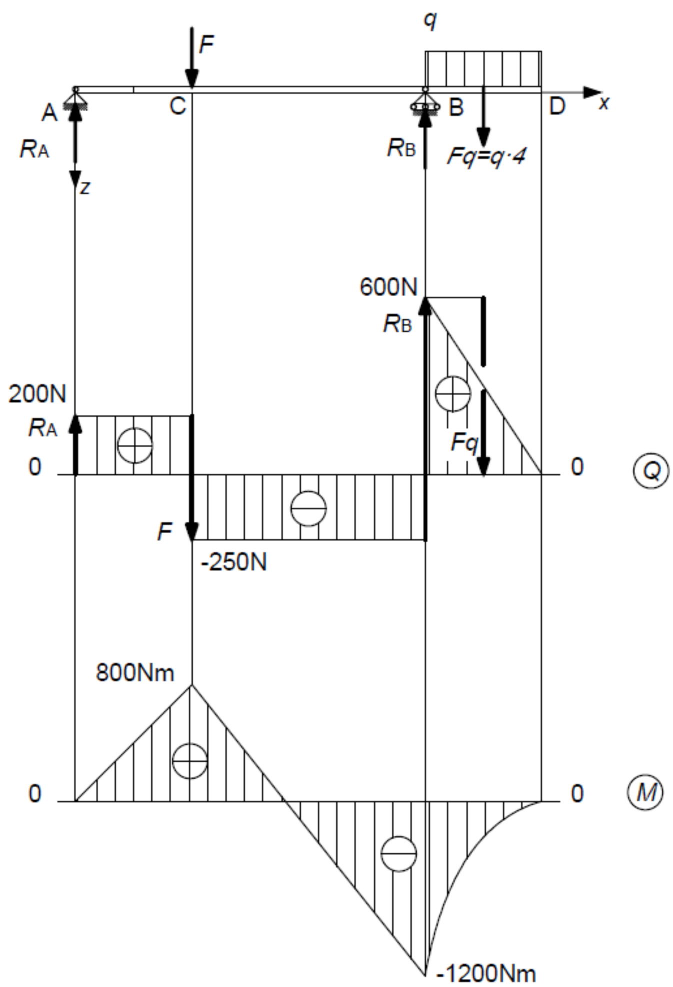
$\sum M_\mathrm{B} = 0 \rightarrow M_\mathrm{B} - R_\mathrm{A} \cdot 12 + F \cdot 8 = 0 \ \rightarrow M_\mathrm{B} = R_\mathrm{A} \cdot 12 - F \cdot 8 = -1200$ Nm. (11.2.5)

c) Skiciranje i kotiranje *Q* i *M* dijagrama

Q dijagram, prikazan na slici 11.2c, može se crtati odmah nakon što smo izračunali reakcije u osloncima. Sve sile koje djeluju u smjeru osi Z (vanjsko opterećenje i reakcije u osloncima) nanosimo slijeva udesno, od početne do završne točke nosača. Bitno je da ih nanosimo u smjeru u kojem djeluju te u zadanim vrijednostima vanjskog opterećenja i izračunatim vrijednostima reakcija u osloncima. Dakako, sve vrijednosti nanosimo u odabranom mjerilu.

Odabrana mjerila za ovaj zadatak su:

- za dimenzije: 1 cm ≙ 2 m
- za poprečne sile *Q*(*x*): 1cm ≙ 200 N
- za momente savijanja *M*(*x*): 1 cm ≙ 400 Nm



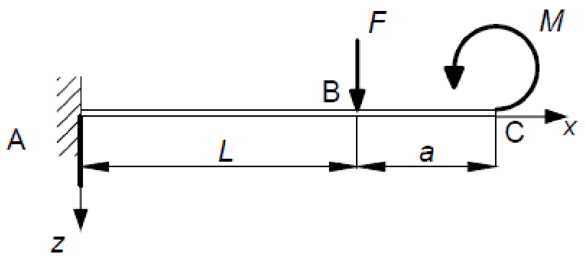
Slika 11.2c: *Q i M dijagrami uz zadatak 11.2*

Zadatak 11.3

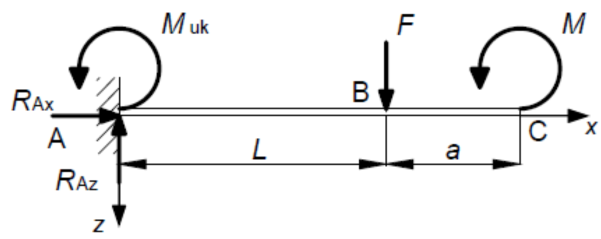
Za konzolni nosač prema slici 11.3a, koji je opterećen koncentriranom silom i momentom savijanja, potrebno je:

a) izračunati reakcije u uklještenju A
b) izračunati vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u karakterističnim točkama
c) skicirati i kotirati dijagrame raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja (Q i M dijagrami).

Zadano: $F = 2000$ N , $M = 1000$ Nm , $a = 1$ m . $L = 2a$.



Slika 11.3a: *Konzolni nosač*



Slika 11.3b: *Konzolni nosač oslobođen od veza*

a) Izračunavanje reakcija u uklještenju A

Kao što je prikazano na slici 11.3b, osim reaktivnih sila potrebno je izračunati i reaktivni moment u uklještenju M_{uk}.

Jednadžbe ravnoteže i izračunate vrijednosti su kako slijede:

$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0.$ (11.3.1)

$\sum M_A = 0 \rightarrow M_{uk} - F \cdot L + M = 0 \rightarrow M_{uk} = F \cdot L - M = 3000$ Nm. (11.3.2)

$\sum F_z = 0 \rightarrow R_{Az} = F = 2000$ N. (11.3.3)

b) Izračunavanje vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja

Kako je objašnjeno u zadatku 11.2, zamišljeni presjek postavljamo upravo u onim točkama u kojima želimo izračunati momente savijanja. Rezultati su dobiveni iz sljedećih jednadžbi ravnoteže:

$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + M_{uk} = 0 \rightarrow M_A = -M_{uk} = -3000$ Nm. (11.3.4)

$\sum M_B = 0 \rightarrow M_B + M_{uk} - R_{Az} \cdot L = 0 \rightarrow M_B = R_{Az} \cdot L - M_{uk} = 1000$ Nm. (11.3.5)

Za dio nosača desno od presjeka:

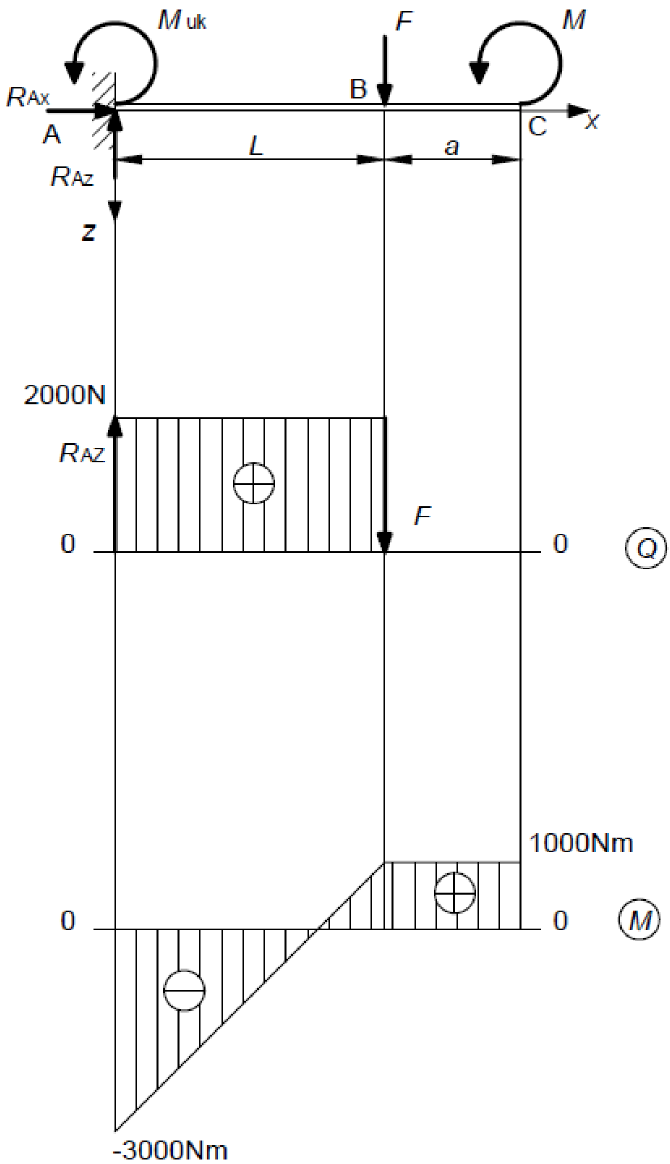
$\sum M_C = 0 \rightarrow M_C - M = 0 \rightarrow M_C = M = 1000$ Nm. (11.3.6)

c) Skiciranje i kotiranje *Q* i *M* dijagrama

Odabrana mjerila za ovaj zadatak su:

- za dimenzije: 1 cm ≙ 0.5 m
- za poprečne sile $Q(x)$: 1cm ≙ 1000 N
- za momente savijanja $M(x)$: 1 cm ≙ 1000 Nm.

Q dijagram je nacrtan na način objašnjen u zadatku 11.2 , a *M* dijagram prema vrijednostima iz b) dijela ovog zadatka.



Slika 11.3c: *Q i M dijagrami uz zadatak 11.3*

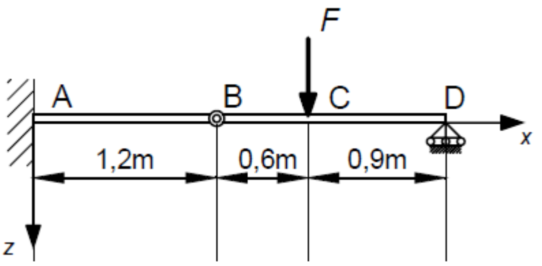
12. SLOŽENI ILI GERBEROVI NOSAČI

Zadatak 12.1

Za Gerberov nosač, prema slici 12.1a, potrebno je:

a) izračunati reakcije u uklještenju A, osloncu D i Gerberovom zglobu B
b) izračunati vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u karakterističnim točkama
c) skicirati i kotirati dijagrame raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja (Q i M dijagrami).

Zadano: F = 2500 N.



Slika 12.1a: *Gerberov nosač*

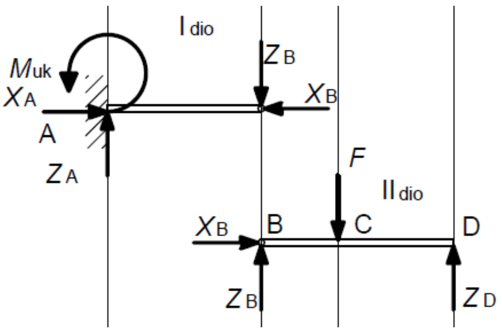
Za rješavanje Gerberovog nosača vrijede potpuno ista pravila i principi kao kod rješavanja punog ravnog nosača. Jedina je razlika što se uvođenjem Gerberovog zgloba statički neodređen nosač postaje statički određen.

Drugim riječima, Gerberovim zglobom dijelimo nosač na dva dijela od kojih jedan dio postaje statički određen. Za taj statički određen dio postavljamo jednadžbe ravnoteže, izračunavamo nepoznanice u osloncima i Gerberovom zglobu. Uz poznate reakcije u Gerberovom zglobu, postavljamo jednadžbe ravnoteže za drugi dio nosača.

Reakcije u Gerberovom zglobu su uzdužna i poprečna sila, dok je moment u zglobu jednak nuli. Osnovni uvjet za rješavanje ovakvih zadataka je da broj Gerberovih zglobova bude jednak broju statičke neodređenosti nosača.

a) <u>Izračunavanje reakcija u uklještenju A, osloncu D i Gerberovom zglobu B</u>

Na slici 12.1b je prikazan nosač s ucrtanim reakcijama i rastavljen na dva dijela u točki B gdje se nalazi Gerberov zglob.



Slika 12.1b: *Gerberov nosač oslobođen od veza*

Prvo postavljamo jednadžbe ravnoteže za II., tj. desni dio nosača koji je podjelom na dva dijela postao statički određen.

$\sum F_x = 0 \rightarrow X_B = 0,$ (12.1.1)

$\sum M_B = 0 \rightarrow F \cdot 0{,}6 - Z_D \cdot 1{,}5 = 0 \rightarrow Z_D = 1000$ N, (12.1.2)

$\sum F_z = 0 \rightarrow Z_B = F - Z_D = 1500$ N. (12.1.3)

Uz poznate reakcije u Gerberovom zglobu, nastavljamo s I., tj. lijevim dijelom nosača.

$\sum F_x = 0 \rightarrow X_A = X_B = 0,$ (12.1.4)

$\sum F_z = 0 \rightarrow Z_A = Z_B = 1500$ N, (12.1.5)

$\sum M_A = 0 \rightarrow M_{uk} - Z_B \cdot 1{,}2 = 0 \rightarrow M_{uk} = 1800$ Nm. (12.1.6)

b) <u>Izračunavanje vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u karakterističnim točkama</u>

$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + M_{uk} = 0 \rightarrow M_A = -M_{uk} = -1800$ Nm, (12.1.7)

$\sum M_C = 0 \rightarrow M_C - Z_D \cdot 0{,}9 = 0 \rightarrow M_C = Z_D \cdot 0{,}9 = 900$ Nm, (12.1.8)

$M_B = 0$ (Gerberov zglob).

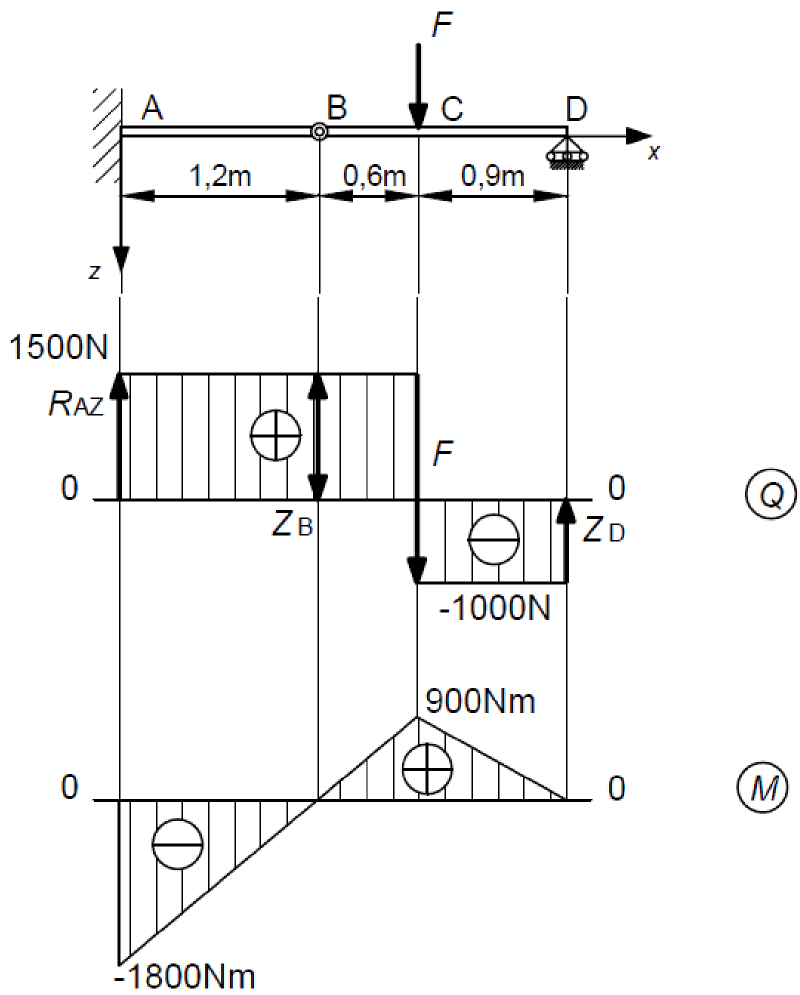
c) <u>Skiciranje i kotiranje Q i M dijagrama</u>

Odabrana mjerila su:

- za dimenzije: 1 cm ≙ 0.5 m
- za poprečne sile $Q(x)$: 1cm ≙ 1000 N
- za momente savijanja $M(x)$: 1 cm ≙1000 Nm.

Crtanje Q i M dijagrama je detaljno objašnjeno u poglavlju 11. U točki B (Gerberov zglob) nanosimo reakciju Z_B prvo za lijevi i onda za desni dio nosača, ili jednostavno, prilikom crtanja preskočimo tu točku.

Dijagrami su prikazani na slici 12.1c .



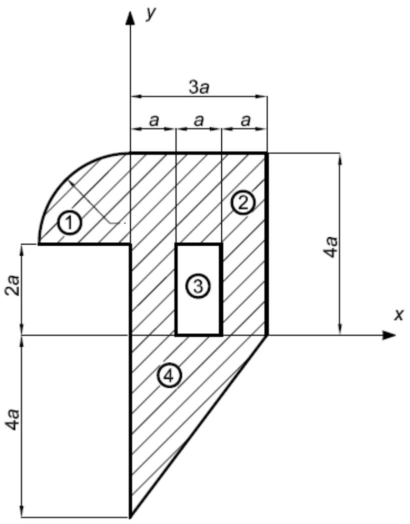
Slika 12.1c: *Q i M dijagrami uz zadatak 12.1*

13. TEŽIŠTA SLOŽENIH PLOHA

Zadatak 13.1

Za složenu plohu prikazanu na slici 13.1a, potrebno je odrediti koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu.

Zadano: $a = 0{,}5$ m , $R = 2a$.



Slika 13.1a: *Složena ploha*

Prvi korak pri izračunavanju koordinata težišta složenih ploha je da se ploha podijeli na jednostavne plohe (kvadrat, pravokutnik, trokut, polukrug itd). Položaj težišta jednostavnih ploha je poznat i možemo ga naći u literaturi, npr. u strojarskom ili inženjerskom priručniku.

Kako je prikazano na slici 13.1a, zadana složena ploha je podijeljena na četiri jednostavne (osnovne) plohe s poznatim položajima težišta:

- 1 : četvrtina kruga radijusa R
- 2 : pravokutnik dimenzija $3a \times 4a$
- 3 : pravokutnik dimenzija $a \times 2a$
- 4 : pravokutni trokut s katetama $3a$ i $4a$.

Ukupnu površinu složene plohe dobivamo tako da zbrojimo površine ploha 1, 2 i 4 i od njih oduzmemo površinu plohe 3. Pri izračunavanju, površinu plohe 3 označavamo kao negativnu.

Izračunate površine pojedinih ploha jesu:

$A_1 = \frac{1}{4} R^2 \pi = 0{,}785 \text{ m}^2$, (13.1.1) $\quad$ $A_2 = 3a \cdot 4a = 3 \text{ m}^2$, (13.1.2)

$A_3 = -2a \cdot a = -0{,}5 \text{ m}^2$, (13.1.3) $\quad$ $A_4 = \frac{3a \cdot 4a}{2} = 1{,}5 \text{ m}^2$. (13.1.4)

Time je ukupna površina zadane složene plohe:

$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4{,}785\ \text{m}^2.$ (13.1.5)

Za površinu A_3 je uvrštena negativna vrijednost iz izraza (13.1.3).

U odnosu na zadani koordinatni sustav, koordinate težišta pojedinih jednostavnih ploha su izračunate kako slijedi. Treba napomenuti da su za izračunavanje korišteni poznati položaji težišta jednostavnih ploha koji su preuzeti iz literature.

$X_{T1} = -\frac{4R}{3\pi} = -\,0{,}424\ \text{m}$, (13.1.6) $Y_{T1} = 2a + \frac{4R}{3\pi} = 1{,}424\ \text{m}$, (13.1.7)

$X_{T2} = a + \frac{a}{2} = 0{,}75\ \text{m}$, (13.1.8) $Y_{T2} = 2a = 1\ \text{m}$, (13.1.9)

$X_{T3} = a + \frac{a}{2} = 0{,}75\ \text{m}$, (13.1.10) $Y_{T3} = a = 0{,}5\ \text{m}$, (13.1.11)

$X_{T4} = \frac{1}{3}\,3a = 0{,}5\ \text{m}$, (13.1.12) $Y_{T4} = -\frac{1}{3}\,4a = -0{,}667\ \text{m}.$ (13.1.13)

Tražene koordinate težišta složene plohe prema zadanom koordinatnom sistemu izračunavamo iz sljedećih izraza:

$$X_T = \frac{1}{A}\sum X_{Ti} \cdot A_i =$$

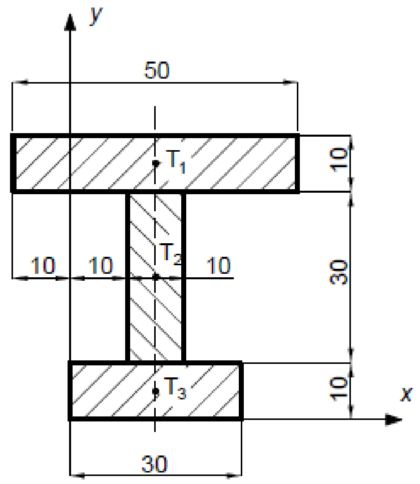
$$X_T = \frac{1}{4{,}785}\left[-0{,}424 \cdot 0{,}785 + 0{,}75 \cdot 3 + 0{,}75 \cdot (-0{,}5) + 0{,}5 \cdot 1{,}5\right] = 0{,}479\ \text{m}, \qquad (13.1.14)$$

$$Y_T = \frac{1}{A}\sum Y_{Ti} \cdot A_i =$$

$$Y_T = \frac{1}{4{,}785}\left[1{,}424 \cdot 0{,}785 + 1 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot (-0{,}5) + (-0{,}667) \cdot 1{,}5\right] = 0{,}598\ \text{m}. \qquad (13.1.15)$$

Zadatak 13.2

Za složenu plohu s dimenzijama koje su prikazane na slici 13.2a, potrebno je odrediti koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu. Dimenzije su zadane u centimetrima.



Slika 13.2a: *Složena ploha*

Kao i u prethodnom zadatku, prvi je korak da složenu plohu podijelimo na nekoliko jednostavnijih.

Tako je ploha podijeljena na 3 pravokutnika čije koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu možemo odrediti prema slici 13.2a.

$X_{T1} = 15\ cm$, $Y_{T1} = 45\ cm$,

$X_{T2} = 15\ cm$, $Y_{T2} = 25\ cm$,

$X_{T3} = 15\ cm$, $Y_{T3} = 5\ cm$.

Površine pravokutnika su izračunate kako slijedi:

$A_1 = 10 \cdot 50 = 500\ cm^2$, $A_2 = 10 \cdot 30 = 300\ cm^2$, $A_3 = 30 \cdot 10 = 300\ cm^2$.

Zbrajanjem tih površina dobivamo ukupnu površinu zadane plohe,

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 = 1100\ cm^2 , \qquad (13.2.1)$$

te nakon toga koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu.

$$X_T = \frac{1}{A} \sum X_{Ti} \cdot A_i = \frac{1}{1100} [15 \cdot 500 + 15 \cdot 300 + 15 \cdot 300] = 15\ cm, \qquad (13.2.2)$$

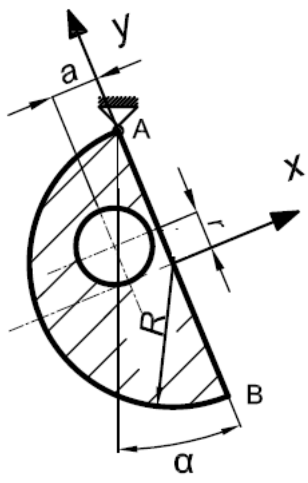
$$Y_T = \frac{1}{A} \sum Y_{Ti} \cdot A_i = \frac{1}{1100} [45 \cdot 500 + 25 \cdot 300 + 5 \cdot 300] = 28{,}6\ cm. \qquad (13.2.3)$$

Zadatak 13.3

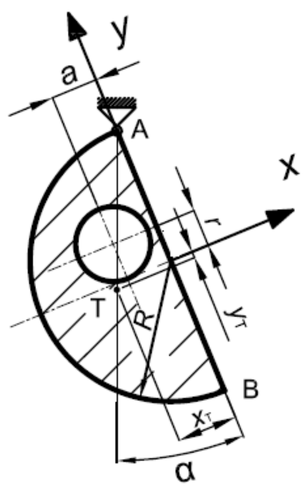
Predmet zadane površine, prikazan na slici 13.3a, obješen je u osloncu A.

Potrebno je odrediti kut α za ravnotežni položaj predmeta.

Zadano: R = 1,5 m , r = 0,4 m , a = 0,5 m.



Slika 13.3a: *Ravnotežni položaj predmeta*



Slika 13.3b: *Izračunavanje težišta*

U ovom zadatku nije posebno navedeno da je potrebno naći koordinatu težišta zadane površine. Traženi kut α se nalazi između dužine $\overline{AB}$ i vertikalne linije koja prolazi težištem zadane površine.

Dakle, ako izračunamo koordinatu težišta zadane površine u odnosu na zadani koordinatni sustav, moći ćemo izračunati dužine dvije katete trokuta čiji je jedan od kutova upravo kut α. Kako je prikazano na slici 13.3b, taj trokut ima katete s dužinama (R+Y_T) i X_T .

Da bismo izračunali položaj težišta, površinu ćemo podijeliti na polukrug radijusa R i krug radijusa r. Pri tome površinu kruga označavamo kao negativnu.

Za polukrug vrijedi:

$$A_1 = \frac{1}{2}\, R^2\, \pi = 3{,}534\ \mathrm{m}^2\ , \qquad X_{T1} = -\frac{4R}{3\pi} = -\ 0{,}636\ \mathrm{m}\ , \qquad Y_{T1} = 0.$$

Za krug vrijedi:

$$A_2 = -r^2\, \pi = -0{,}503\ \mathrm{m}^2\ , \qquad X_{T2} = -a = -\ 0{,}5\ \mathrm{m}\ , \qquad Y_{T2} = r = 0.4\ \mathrm{m}.$$

U nastavku izračunavamo položaj težišta zadane površine u odnosu na zadani koordinatni sustav.

$$X_{\mathrm{T}} = \frac{1}{A}\sum X_{\mathrm{Ti}} \cdot A_{\mathrm{i}} =$$

$$X_{\mathrm{T}} = \frac{1}{3{,}534 - 0{,}503}\ [(-0{,}636) \cdot 3{,}534 + (-0{,}5) \cdot (-0{,}503)] = -\ 0{,}659\ \mathrm{m}, \qquad (13.3.1)$$

$$Y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{A}\sum Y_{\mathrm{Ti}} \cdot A_{\mathrm{i}} = \frac{1}{3{,}534 - 0{,}503}\ [0 \cdot 3{,}534 + 0{,}4 \cdot (-0{,}503)] = -\ 0{,}066\ \mathrm{m}. \qquad (13.3.2)$$

Kao što je prije rečeno te prikazano na slici 13.3b, traženi kut α, koji definira ravnotežni položaj predmeta, nalazi se u trokutu s katetama (R+Y_{T}) i X_{T} .Vrijednost kuta α izračunavamo iz sljedeće trigonometrijske funkcije:

$$\tan\alpha = \frac{|X_{\mathrm{T}}|}{R + |Y_{\mathrm{T}}|} = 0{,}421 \ \rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\ 0{,}421 = 22{,}8^{\mathrm{o}}. \qquad (13.3.3)$$

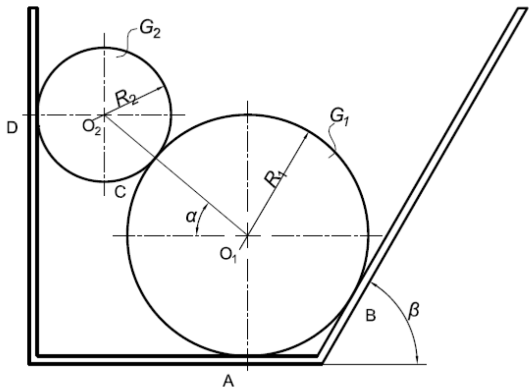
14. ZADACI ZA VJEŽBU

Zadatak 14.1

Dva homogena kružna valjka, polumjera R_1 i R_2, nalaze se na dnu kutije kako je prikazano na slici 14.1a.
Potrebno je izračunati reakcije u dodirnim točkama A, B, C i D.

Zadano: R_1 = 9 cm , R_2 = 5 cm , G_1 = 50 N , G_2 = 20 N , α = 40º , β = 60º.

Rješenja: R_A = 56,2 N , R_B = 27,5 N , R_C = 31,1 N , R_D = 23,8 N.



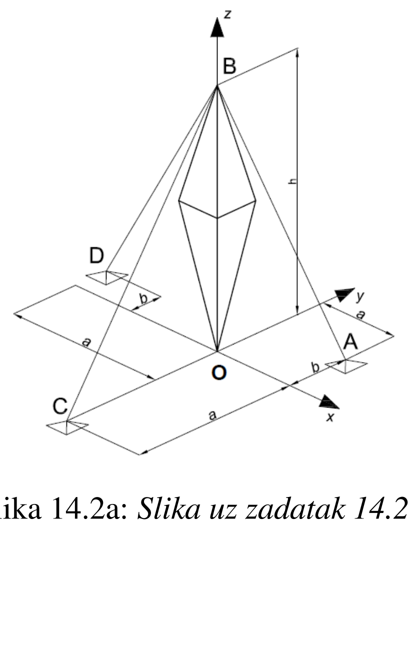
Slika 14.1a: *Slika uz zadatak 14.1*

Zadatak 14.2

Stup OB, prikazan na slici 14.2a, se u vertikalnom položaju održava čeličnim užadima BA, BC i BD. Ako je poznata sila u užetu BA, potrebno je izračunati iznos sila u užadima BC i BD.

Zadano: F_{BA} = 1000N , a = 4 m , b = 1m , h = 10 m .

Rješenja: F_{BC} = 498 N , F_{BD} = 1000 N.



Slika 14.2a: *Slika uz zadatak 14.2*

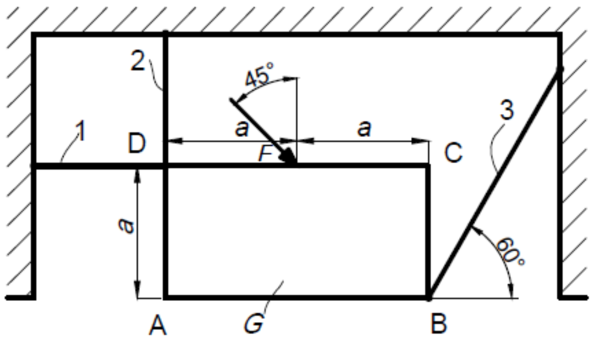
Zadatak 14.3

Pravokutna ploča ABCD, težine G, opterećena je silom F, a u ravnotežnom položaju se održava pomoću štapova 1, 2 i 3. Ravnotežni položaj ploče je prikazan na slici 14.3a.

Potrebno je odrediti sile u štapovima.

Zadano: $G = 6000$ N , $F = 4000$ N , $a = 1$ m.

Rješenja: $S_1 = 4806$ N, $S_2 = 5403$ N, $S_3 = 3955$ N.



Slika 14.3a: *Slika uz zadatak 14.3*

Zadatak 14.4

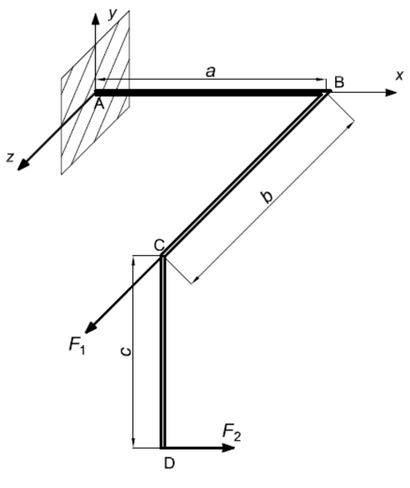
Nosač ABCD, prikazan na slici 14.4a, ukliješten je u osloncu A i opterećen silama F_1 i F_2 .

Potrebno je odrediti reaktivne sile i momente u ukliještenju A.

Zadano: $F_1 = 250$ N , $F_2 = 200$ N , $a = 0{,}2$ m , $b = 0{,}2$ m , $c = 0{,}15$ m

Rješenja (smjerovi reakcija su pretpostavljeni u pozitivnim smjerovima koordinatnih osi):

$F_{AX} = -200$ N , $F_{AY} = 0$, $F_{AZ} = -250$ N , $M_{AX} = 0$, $M_{AY} = 10$ Nm , $M_{AZ} = -30$ Nm .



Slika 14.4a: *Slika uz zadatak 14.4*

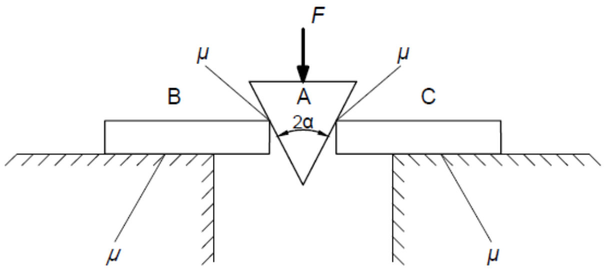
Zadatak 14.5

Djelujući silom F na klin A zanemarive težine, ploče B i C, svaka težine G, će se gibati u horizontalnom smjeru. Položaj klina i ploča je prikazan na slici 14.5a. Trenje između ploča i podloge, kao i između klina i svake ploče, je definirano koeficijentom trenja klizanja μ .

Potrebno je izračunati veličinu sile F za horizontalno gibanje ploča B i C.

Zadano: $G = 100$ N , $\mu = 0{,}35$, $2\alpha = 30^{\circ}$.

Rješenje: $F = 62{,}7$ N.



Slika 14.5a: *Slika uz zadatak 14.5*

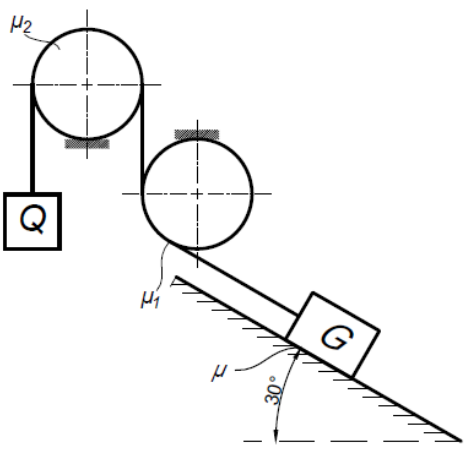
Zadatak 14.6

Blok težine G, prikazan na slici 14.6a, nalazi se na kosini pod kutom α. Blok je užetom, koje je prebačeno preko dvije nepomične koloture, vezan za uteg Q.

Potrebno je odrediti najmanju težinu utega Q za koju će blok težine G ostati u stanju mirovanja.

Zadano: $G = 1000$ N, $\mu = 0{,}25$, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}15$, $\alpha = 30^{\circ}$.

Rješenje: $Q = 129{,}3$ N.



Slika 14.6a: *Slika uz zadatak 14.6*

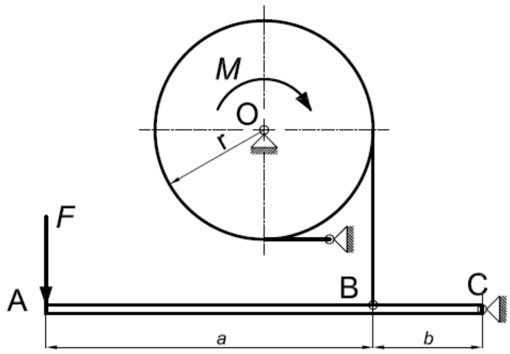
Zadatak 14.7

Kočnica prema slici 14.7a koči bubanj na koji djeluje moment M.

Za poznatu silu kočenja F, koja djeluje na kraju poluge AC, potrebno je odrediti najveći iznos momenta M.

Zadano: $F = 1000$ N , $\mu = 0{,}4$, $a = 0{,}8$ m , $b = 0{,}5$ m , $r = 0{,}3$ m.

Rješenje: $M = 4356{,}3$ Nm.



Slika 14.7a: *Slika uz zadatak 14.7*

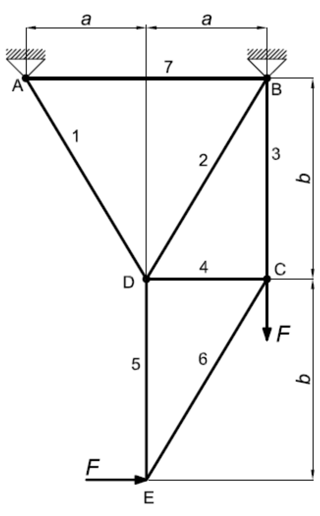
Zadatak 14.8

Rešetkasti nosač je opterećen s dvije sile prema slici 14.8a. Oslonci u točkama A i B su nepomični.

Potrebno je odrediti sile u svim štapovima rešetke.

Zadano: $F = 1250$ N , $a = 3$ m , $b = 5$ m.

Rješenja: $S_1 = 2429{,}6$ N , $S_2 = 0$, $S_3 = -\ 833{,}3$ N , $S_4 = 1250$ N , $S_5 = 2083{,}3$ N , $S_6 = -\ 2429{,}6$ N.



Slika 14.8a: *Slika uz zadatak 14.8*

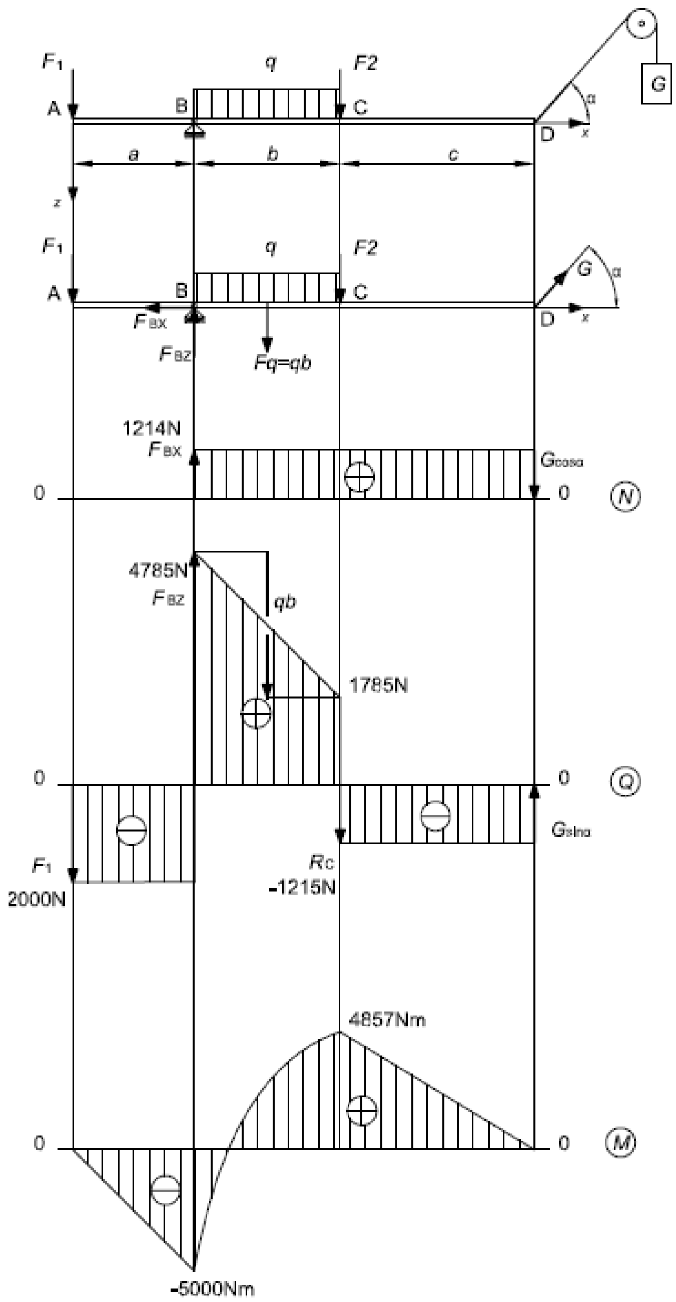
Zadatak 14.9

Za zadani gredni nosač prema slici 14.9a , potrebno je:

a) izračunati reakciju u osloncu B i potrebnu težinu utega G da bi nosač ostao u ravnotežnom položaju
b) izračunati iznose normalnih i poprečnih sila te momenata savijanja u karakterističnim točkama grede
c) skicirati i kotirati N, Q i M dijagrame.

Zadano: $F_1 = 2000$ N , $F_2 = 3000$ N , $q = 1000$ N/m , $\alpha = 45^o$, $a = 2.5$ m , $b = 3$ m , $c = 4$ m.

Rješenja: $F_{BX} = 1214$ N , $F_{BZ} = 6785$ N , $G = 1717$ N, dijagrami prema slici 14.9a.



Slika 14.9a: *Slika uz zadatak 14.9*

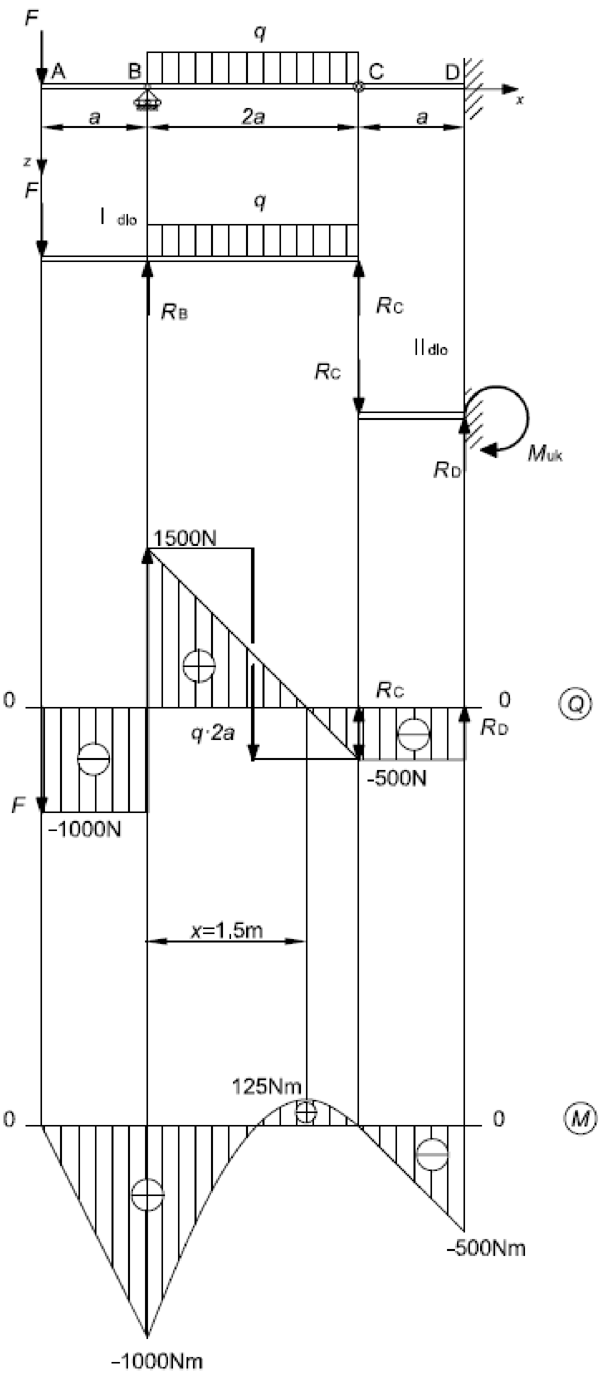
Zadatak 14.10

Za Gerberov nosač prema slici 14.10a potrebno je:

a) izračunati reakcije u uklještenju D, pomičnom osloncu A i Gerberovom zglobu C
b) izračunati vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u karakterističnim točkama
c) skicirati i kotirati dijagrame raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja (Q i M dijagrami).

Zadano: $F = 1000$ N , $q = 1000$ N/m , $a = 1$ m.

Rješenja: $R_B = 2500$ N , $R_D = 500$ N , $R_C = 500$ N , $M_{uk} = 500$ Nm, dijagrami prema slici 14.10a.



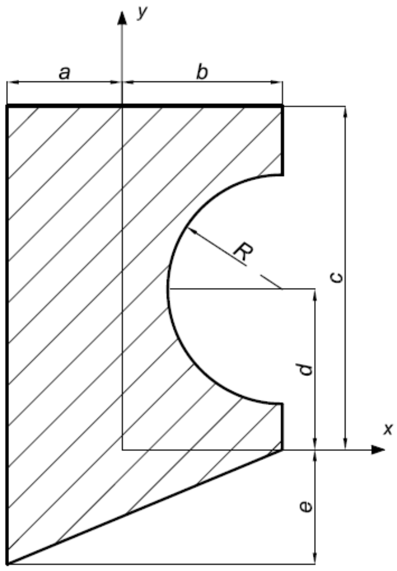
Slika 14.10a: *Slika uz zadatak 14.10*

Zadatak 14.11

Za složenu plohu prema slici 14.11a potrebno je odrediti koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu.

Zadano: $a = e = 5$ m , $b = d = 7$ m , $c = 15$ m , $R = 5$ m.

Rješenja: $X_T = -0{,}243$ m, $Y_T = 6{,}004$ m.



Slika 14.11a: *Slika uz zadatak 14.11*

15. PRIMJER ISPITNE ZADAĆE

Ispitna zadaća,, tj. pismeni dio ispita se sastoji od četiri zadatka koji su odabrani kao kombinacija zadataka iz različitih tematskih područja.

Prvi se zadatak odnosi na konkurentni ili proizvoljni sustav sila u ravnini ili prostoru što je predstavljeno u poglavljima od 2 do 5.

U drugom se zadatku traži primjena zakonitosti trenja klizanja (Coulombov zakon) i primjena Eulerove jednadžbe užetnog trenja (poglavlja od 6 do 8).

U trećem se zadatku izmjenjuju rešetkasti nosači (poglavlje 10) i zadaci vezani za izračunavanje težišta složenih ploha (poglavlje 13).

Četvrti se zadatak odnosi na analizu punog ravnog nosača (poglavlja 11 i 12).

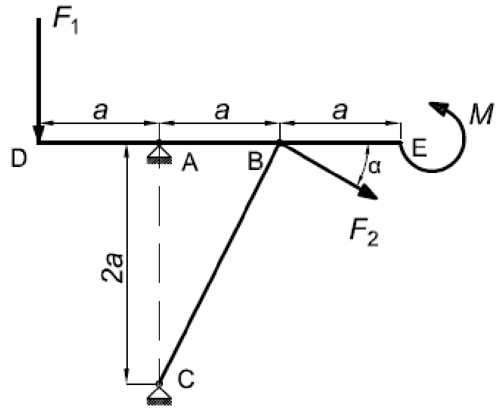
Zadatak 15.1

Konstrukcija se sastoji od štapa BC, te od grede DE koja je oslonjena u nepomičnom osloncu A. Konstrukcija je opterećena s dvije sile i momentom kako je prikazano na slici 15.1a.

Potrebno je odrediti reakciju u osloncu A i silu u štapu.

Zadano: $F_1 = 2500$ N , $F_2 = 400$ N , $M = 1000$ Nm , $a = 2$ m , $\alpha = 30^\circ$.

Rješenja: $S_{CB} = 3131$ N , $R_{AX} = 1054$ N , $R_{AY} = 5500$ N.



Slika 15.1a: *Slika uz zadatak 15.1*

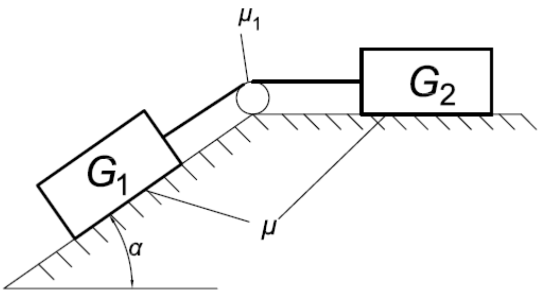
Zadatak 15.2

Kako je prikazano na slici 15.2a , blok težine G_1 se nalazi na hrapavoj kosini pod kutom α, a blok težine G_2 na hrapavoj horizontalnoj podlozi. Blokovi su povezani užetom koje je prebačeno preko nepomične koloture s trenjem. Blok G_2 osigurava jednoliko spuštanje bloka G_1 niz kosinu.

Ako su poznate težine blokova, potrebno je odrediti koeficijent trenja klizanja μ za jednoliko spuštanje bloka G_1 niz kosinu.

Zadano: $G_1 = 120$ N , $G_2 = 180$ N , $\alpha = 35^{\circ}$, $\mu_1 = 0{,}3$.

Rješenje: $\mu = 0{,}2$.



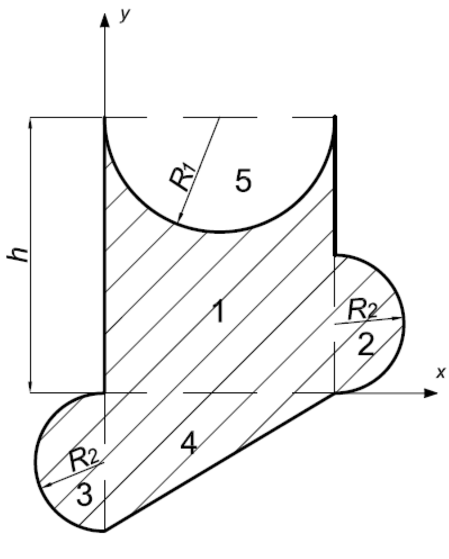
Slika 15.2a: *Slika uz zadatak 15.2*

Zadatak 15.3

Za složenu plohu prema slici 15.3a potrebno je odrediti koordinate težišta prema zadanom koordinatnom sustavu.

Zadano: $R_1 = 5$ m , $R_2 = 3$ m , $h = 12$ m.

Rješenja: $X_T = 4{,}64$ m , $Y_T = 1{,}96$ m.



Slika 15.3a: *Slika uz zadatak 15.3*

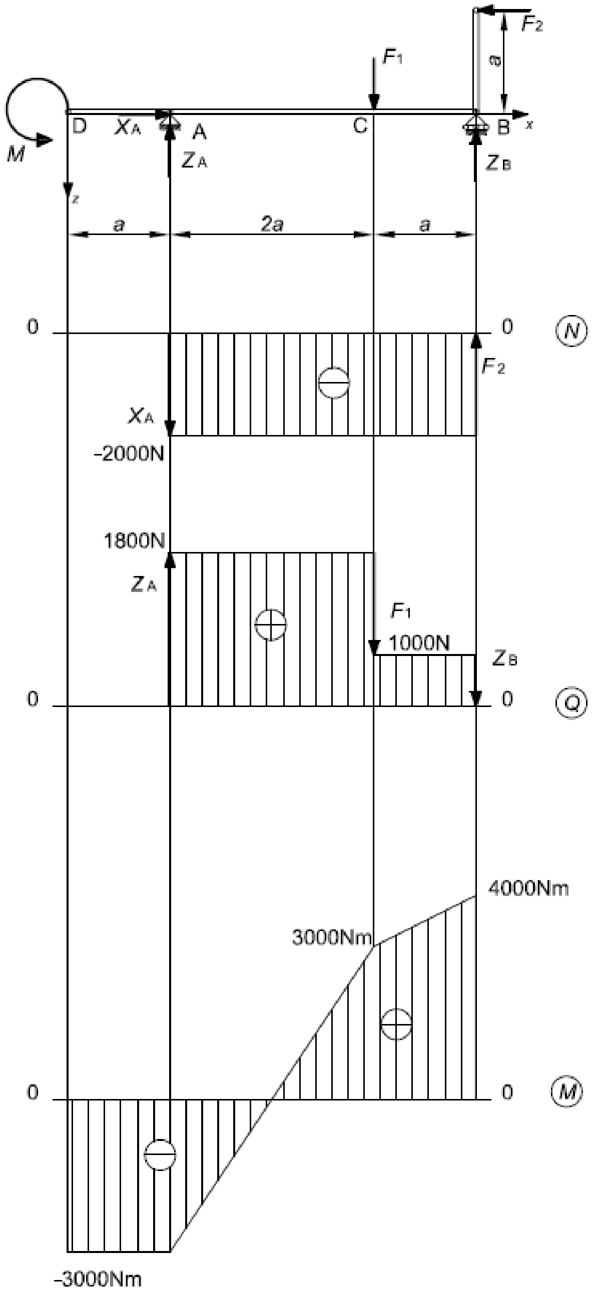
Zadatak 15.4

Za zadani gredni nosač prema slici 15.4a potrebno je:

a) izračunati reakcije u osloncima
b) izračunati iznose normalnih i poprečnih sila te momenata savijanja u karakterističnim točkama grede
c) skicirati i kotirati *N*, *Q* i *M* dijagrame.

Zadano: $F_1 = 1000$ N , $F_2 = 2000$ N , $M = 3000$ Nm , $a = 2$ m.

Rješenja: $X_A = 2000$ N, $Z_A = 1500$ N, $Z_B = -500$ N, dijagrami prema slici 15.4a.



Slika 15.4a: *Slika uz zadatak 15.4*

LITERATURA:

1. Alfirević, I.; Muftić, O. : **Statika krutih tijela, Inženjerski priručnik IP1**, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
2. Alfirević, I.; Saucha, J.; Tonković, Z.; Kodvanj, J.: **Uvod u mehaniku I. - Statika krutih tijela**, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2010.
3. Alfirević, I.; Saucha, J.; Tonković, Z.; Kodvanj, J.: **Uvod u mehaniku II.- Primijenjena statika**, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2010.
4. Bazjanac, D.: **Zbirka zadataka iz tehničke mehanike (Statika)**, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1969.
5. Brnić, J.: **Mehanika i elementi konstrukcija**, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
6. Kraut, B.: **Strojarski priručnik**,Tehnička knjiga, Zagreb,1982.
7. Matejiček, F.; Semenski, D.; Vnučec. Z.: **Uvod u statiku sa zbirkom zadataka**, Strojarski fakultet, Slavonski Brod, 2009.
8. Meriam, J.L. , Kraige, L.G. : **Statics** , Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2012.
9. Muftić, O.: **Mehanika 1 – Statika**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
10. Plazibat, B., Matoković, A.,Vetma, V. :**Tehnička mehanika I**, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2018.